BHS
III
17 a
1207.

BHS III 17 a

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke Aktiengesellschaft
Bibliothek:
Gruppe: III
B Nr. 17a

Theoretisch = praktische Versuche

über den

Widerstand oder die Haltbarkeit

des

geschmiedeten Eisens.

Mit Anwendung der Resultate dieser Versuche

in

der Baukunst.

Von

A. Duleau,

vormal. Eleven der polytechnischen Schule, Ingenieur der Brücken und Straßen.

Aus dem Französischen übersetzt,

und

mit einer ergänzenden Vorrede begleitet

von

Dr. J. G. L. Blumhof,

Großherzogl. Hessischem Hofkammerrathe, außerordentlichem Professor der Technologie, Berg= und Hüttenkunde auf der Ludwigsuniversität zu Gießen, und Mitgliede mehrerer gelehrter Gesellschaften.

Mit 4 Steintafeln.

Quedlinburg und Leipzig 1825,

bei Gottfried Basse.

BIBLIOTHEK DER K. B. GENERAL BERG- U. SALINEN ADMINISTR.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Untersuchungen über die Festigkeit oder den Widerstand des Eisens überhaupt, sowohl des Roh- als Stabeisens, sind besonders in Hinsicht der Anwendung dieses vorzüglichen Metalles in der Baukunst, von dem größten Interesse, und jeder dahin abzweckende Beitrag muß dem Techniker, so wie auch dem Physiker willkommen seyn. Ein solcher dankenswerther Beitrag ist denn auch die vorliegende Schrift des Hrn. Duleau, von welcher ich hier eine deutsche Übersetzung liefere. Der Titel des Originals ist folgender: Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, contenant des Expériences sur des barres chargées parallèlement et perpendiculairement à leur longueur; sur un arc placé entre deux appuis fixes, et chargé en un ou plusieurs de ses points; sur des barres qu'on essaie de tordre; Avec des Applications des Résultats de ces expériences à l'art des constructions. Par

A. Duleau. Paris 1820. gr. 4. VIII. und 79 Seiten, mit 4 Kupfertafeln.

Unstreitig hat der Verfasser dieser Abhandlung die Versuche über diesen Gegenstand weit mehr vervielfältigt und abgeändert, als seine Vorgänger, wovon man sich beim Durchlesen der Schrift selbst leicht überzeugen wird. Auch sind ihm die meisten der von andern Verfassern über die Festigkeit und Haltbarkeit des geschmiedeten Eisens angestellten Versuche recht wohl bekannt, wie die kurze Zusammenstellung derselben am Ende dieser Abhandlung beweist.

Nur von einigen wenigen, hier nicht erwähnten Versuchen will ich eine kurze Nachricht beifügen, und zugleich die vorzüglichsten Bücher anzeigen, woraus man weitere Belehrung schöpfen kann.

Bekanntlich ist Musschenbroek der erste, dem wir einige vergleichende Versuche über die Festigkeit verschiedener Arten von Stabeisen und Stahl verdanken. Man findet die Beschreibung derselben in dessen Diss. phys. experiment. et geometr. 1729. p. 421. und in seiner Introductio ad philos. naturalem. 1762. Tom. I. p. 417 *).

Der Graf von Buffon (Histoire des mineraux Tom. IV. Sur la tenacité et sur la dé-

*) Vergl. meine Encyklopädie der Eisenhüttenkunde 2c. Bd. IV. S. 627.

composition du fer) behaupte, daß das Eisen an seinem Zusammenhalt durch wiederholtes Glühen verliere, oder daß es dann nur vollkommen gut sey, wie es aus dem Frischfeuer kommt, nachher aber bei jedem Weißwärmen an Güte und Stärke schlechter werde ꝛc. Dagegen aber hat schon Tronson du Coudray (Nouvelles expériences et observatíons sur le fer etc. Upsal 1775. 8.), das Gegentheil durch mehrere Versuche bewiesen. Er bediente sich dabei geschmiedeter Nägel, Ringe und Drathzüge. In die Ringe hing er so lange immer mehr Gewicht, bis sie zerbrachen, und beim Drathe nahm er den für den zähesten an, der sich am dünnsten ziehen ließ, wo er nach und nach durch ein engeres Zieheisen geht. Zu den Ringen wurde ein Stück gut ausgeschmiedetes gleichförmiges Eisen von körnigtem Bruche gewählt, welches 1 Zoll ins Gevierte stark war. Hiervon wurden 15 besondere Stücke mit öfterm Wärmen bis zu 4 Linien par. M. ins Gevierte ausgereckt, und davon die Proberinge gemacht.

Nro. 1. ausgeschmiedet mit zwei Hitzen zerbrach von einem Gewicht von 108 Cnt.
= 2. = mit drei Hitzen, von = 116 =
= 7. = mit acht Hitzen, von = 120 =
= 12. = mit dreizehn Hitzen, von 116 =

Dieses Eisen wurde nun achtfach, mit 20

Weißwärmungen zusammengeschweißt, oder raffinirt, wo dann die daraus gebildeten Ringe 118 bis 120 Centner trugen, ehe sie zerbrachen. Der Bruch des Eisens wurde dabei zackig und das Eisen so zähe, daß sich die Ringe merklich verlängerten, ehe sie zerbrachen.

Die Versuche mittelst des Drathzugs stellte du Coudray mit einer Sorte spanischem und mit 2 Sorten elsasser Eisen an, welche einen gleichen zackigen Bruch hatten. Das spanische Eisen, nur bei einer Hitze gereckt, hielt bis zum 7ten Loche des Zieheisens. Dasselbe Eisen, bei 13 Hitzen raffinirt, zerriß ebenfalls nicht eher als in diesem Loche. Das elsasser Eisen, bei einer Hitze ausgereckt, zerriß im 5ten Loche; bei 16 Hitzen raffinirt, hielt es bis zum 7ten Loche, zerriß aber mit 36 Hitzen im 6ten Loche des Zieheisens. Die andere elsasser Eisensorte hielt, einmal gereckt, bis zum 5ten, aber bei 23 Hitzen gereckt und geschmiedet, bis zum 10ten Loche des Zieheisens.

Diese Versuche scheinen zu beweisen, daß das Eisen durch wiederholtes Glühen wenigstens nicht verschlechtert wird, wenn es nur von guter Art ist. Nur darf eine trockene Glühhitze nicht zu lange anhalten, das Eisen muß in der Schweißhitze mit glasigem Sande bedeckt und nach jeder Hitze geschmiedet werden.

Auch der schwedische Bergassessor Quist in Stockholm hat sich viele Mühe gegeben, die Stärke und Festigkeit verschiedener Drathsorten auszumitteln. Seine desfalls gemachten Versuche sind in Rinman's Geschichte des Eisens, Th. I. S. 637. f. der Karsten'schen Übersetzung, beschrieben. Ich kann hier bloß die Resultate derselben anführen.

1) Stockholmer Drath ist eben so stark und noch etwas zäher und elastischer als der von Iserlohe. 2) Ungeglühet läßt sich der erstere etwas länger strecken, als der letztere, aber geglüht etwas weniger. 3) Der Stockholmer Drath läßt sich öfterer hin und her biegen, als der von Iserlohe, ehe er bricht. 4) Der Drath von Jäder läßt sich am längsten strecken, ehe er bricht; er verträgt indeß kein so starkes Biegen und besitzt die wenigste Elasticität. 5) Auch der schwedische Drath von Stebo läßt sich nicht so stark biegen, als der Iserloher; er ist aber dichter und spaltet weniger. 6) Der geglühte Stahldrath verhielt sich beim Strecken zum ungeglühten, wie 5 zu 1. 7) Der ungeglühte Stahldrath verhielt sich zum geglühten Eisendrath, wie 7 zu 1 rc. *) —

*) Das Buch: Beiträge zur Civilbaukunst, worin die Stärke des Eisens und des Holzes erläutert wird. Frankfurt a. M. 1796. 8. Mit Kupf. — kenne ich nur dem Titel nach.

Die von Texier de Norbeck beschriebenen Versuche finden sich auch in Hassenfratz Sidérotechnie, T. I. p. 47.; Karsten's Handbuch der Eisenhüttenkunde, Th. I. S. 68. und in meiner Encyklopädie der Eisenhüttenkunde ꝛc. Bd. IV. S. 627.

Über die Prony'schen Versuche in Hinsicht der Zähigkeit des Eisens, der Holzarten und der Metalle ist besonders der zweite Cahier du Recueil des Mémoires des Ponts et Chaussées, publié par Mr. Lesage nachzulesen.

Nach den neuesten, von Th. Tredgold angestellten Versuchen soll gutes englisches Stabeisen, ohne anhaltende Veränderung in seiner mechanischen Zusammensetzung zu erleiden, 17800 engl. Pfund (oder 1,12 mal so viel als Roheisen) tragen können und sich dabei um $\frac{1}{1400}$ seiner Länge (=0,86 mal so stark als Roheisen) biegend ausdehnen. S. Practical Essay on the Strength of Cast-Iron, by Th. Tredgold. London 1822. 8. u. Karsten's Archiv für Berg- und Hüttenwesen, Bd. VI. Hft. 2. S. 433.

Da die Untersuchungen über die Festigkeit oder den Widerstand des Roheisens kein Gegenstand der vorliegenden Schrift sind, so übergehe ich solche hier ebenfalls mit Stillschweigen.

Gießen, im August 1824.

Dr. Blumhof.

Vorbericht.

Als ich im Jahre 1812 mit dem Entwurfe eines Projekts zum Bau einer eisernen Brücke über die Dordogne vor Cubzac beschäftigt war, unternahm ich die Versuche, welche den Gegenstand dieser Abhandlung ausmachen, bloß in der Absicht, um den Widerstand der Theile dieser Brücke zu berechnen.

Diese Versuche gaben Resultate, welche für die Baukunst anwendbar sind; ich habe solche in einer dem Conseil des Ponts et Chaussées im Jahre 1813 übergebenen Schrift gesammelt und zusammengestellt.

Seit dieser Zeit habe ich noch einige neue Beobachtungen gemacht, und solche mit den erstern in der hier vorliegenden Abhandlung verbunden.

Dieser Versuch hat die Billigung der königl. Akademie der Wissenschaften erhalten, in Gemäßheit eines durch die HH. Poisson, Girard und Couchy in der Sitzung von 7. August 1819 darüber erstatteten Berichts.

Das Conseil-général des Ponts et Chaussées hat, nach der Anzeige einer aus den HH. Brüyere, Berigny und de Prony bestehenden Commission, meine Arbeit ebenfalls geprüft, und verlangt, daß solche dem Druck übergeben und an die Ingenieurs vertheilt würde. Der Hr. Generaldirector selbst hatte die Güte, auf 100 Exemplare zu unterzeichnen.

Solche ehrenvolle Zeugnisse lassen mich hoffen, daß meine Arbeit vielleicht von einigem Nutzen seyn könnte, wodurch ich denn auch zur Herausgabe derselben bewogen worden bin.

Da meine Hauptabsicht dahin ging, die Resultate meiner Versuche auf die Ausübung anzuwenden, so glaube ich, daß es zweckmäßig sey, den Widerstand des geschmiedeten Eisens durch Gewichte auszumitteln, welche nur leichte Biegungen hervorbringen. Eine zu bedeutende Abänderung der Form würde nur auf Kosten der Festigkeit der Constructionen, deren einzelne Theile durch das Eisen verbunden werden sollen, Statt finden.

Fast alle bisher angestellten Versuche waren auf die Bestimmung der Kraft gerichtet, welche zum Zerbrechen einer Stange nach der Richtung ihrer Länge erforderlich ist. Dagegen sind nach den von mir gewählten Gesichtspunkten nur zwei Versuche gemacht worden, nämlich von Hrn. Aubry, General-Inspector der Brücken und Chausseen *). Aus diesen Beobachtungen folgt, daß,

*) Mémoire sur différentes questions de la science des Constructions publiques et économiques. Lyon 1790.

wenn man ein Stück (pièce) in der Mitte senkrecht auf die Länge desselben belastet, dasselbe sich nach Verhältniß der Belastung biegt. Dieses ist die Eigenschaft, welche die Theorie für eine elastische Platte anzeigt. Das Eisen widersteht also in diesem Falle wie ein vollkommen elastischer Körper, und man darf daher hoffen, daß die den Widerstand desselben darstellenden Phänomene, bis auf einen gewissen Punkt, durch die Theorie vorhergesehen werden dürften. Hierdurch bin ich veranlaßt worden, diejenigen Untersuchungen vorzunehmen, welche in dem ersten Theile dieser Abhandlung enthalten sind, und das Resultat derselben mit dem aus den Beobachtungen zu vergleichen.

Die Versuche wurden gemacht:

1) mit Stangen von geschmiedetem Eisen, horizontal mit Gewichten belastet, die zu schwach waren, um deren Elasticität zu verändern, wie z. B. die Balken unter den bretternen Fußböden.

2) Mit denselben Stangen, vertikal belastet und resistirend, wie Säulen oder vertikale Träger.

3) Mit ganzen Systemen von eisernen Stäben, welche auf verschiedene Weise mit einander verbunden waren, um dadurch den Widerstand derselben zu vermehren.

4) Mit einem von Natur gebogenen und zwischen zwei festen Stützen befindlichen Stücke. Ein Brückenbogen von geschmiedetem Eisen könnte, wenn die Verbindung seiner verschiedenen Theile vollkommen wäre, wie ein einziges Stück betrachtet werden, und er würde auf eben die Weise resistiren, wie der den Versuchen unterworfene Bogen.

5) Mit Stangen, welche einer drehenden Kraft, die jedoch zu schwach ist, um die Elasticität zu verändern, unterworfen worden, wie solches bei einigen Maschinen der Fall ist.

In dem letzten Abschnitte habe ich die Resultate der von verschiedenen Schriftstellern über das geschmiedete Eisen angestellten Versuche aller Art, zusammengestellt.

Schließlich statte ich dem Hrn. Bernard, Ingenieur der Brücken und Straßen, welcher, als er im Jahre 1812 zu Bourdeaux angestellt war, nicht nur meinen Versuchen beizuwohnen, sondern mich auch mit Rath zu unterstützen die Güte gehabt hat, meinen verbindlichen Dank ab.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Betrachtungen über den Widerstand elastischer fester Körper.

§. I. Prismatische feste Körper, perpendiculär oder parallel mit ihrer Länge belastet

Seite

1. Allgemeine Betrachtungen 1
2. Elastische Platte, welche am einen Ende eingelassen und am andern beschwert ist 5
3. Dieselbe, auf zwei Stützen gelegt, und in der Mitte belastet 8
4. Dieselbe, am einen Ende eingelassen, und ihrer ganzen Länge nach ungleichförmig belastet . . 9
5. Dieselbe, auf zweien Stützen, übrigens wie die vorhergehende (4) 10

Seite

6. Dieselbe, auf zweien Stützen, und in einem Punkt belastet, aber am einen oder an beiden Enden eingelassen 11
7. Dieselbe, parallel mit ihrer Länge gepreßt . 13
8. Verhältniß des Widerstandes einer perpendiculär oder parallel mit ihrer Länge gedrückten Platte 17
9. Anwendungen der vorhergehenden Resultate auf einen prismatischen festen Körper 18
10. Fester Körper mit rechtwinklichtem Querschnitt 21
11. Fester Körper, welcher zum Querschnitt einen Kreis hat 22
12. System von zwei Stücken, welche einen Raum zwischen sich lassen 23
13. Runde und vierkantige Röhren 24

§. II. Bogen, oder natürlich gebogenes Stück, zwischen zwei festen Stützen . . . . —

§. III. Elastische feste Körper, welche einer drehenden Kraft unterworfen gewesen sind 25

1. Cylinder . . . . —
2. Runde Röhren 27
3. Vierkantige Prismen . . . . —

Zweiter Abschnitt.

Versuche.

Seite

Erste und zweite Reihe. Gerade Stücke von geschmiedetem Eisen, ohne Zusammenfügung, welche perpendiculär und parallel mit ihrer Länge gedrückt werden 29

Dritte Reihe. Systeme von Stücken, welche einen Raum zwischen sich lassen, und perpendiculär auf ihrer Länge belastet werden 34

Vierte Reihe. Bogen oder natürlich gewölbtes Stück zwischen zwei festen Stützen 38

Fünfte Reihe. Gedrehte oder gewundene Eisenstücke 46

Dritter Abschnitt.

Gesetze für den Widerstand des geschmiedeten Eisens.

Bemerkungen über diese Gesetze 60

Tabellen, welche die Stärke des geschmiedeten Eisens anzeigen 67

Vierter Abschnitt.

Kurze Wiederholung der von verschiedenen Autoren über die Stärke des Stabeisens angestellten Versuche 76

		Seite
Anmerkung:	1) Über die Versuche 2 und (3) . .	89
	2) Grade der Ausdehnung oder der Zusammenziehung, wobei das Eisen seine Elasticität verliert	—
	3) Über die am Ende gedrückten Stücke	93

Erster Abschnitt.

Theoretische Betrachtungen über den Widerstand elastischer fester Körper.

§. I. Prismatische feste Körper, welche auf ihre Länge senkrecht, oder mit derselben parallel belastet sind.

1. Allgemeine Betrachtungen über die Art des Widerstandes dieser festen Körper.

Ein elastischer Körper sey an den Seiten durch eine oder durch mehrere cylindrische Oberflächen begränzt, deren erzeugende parallel sind. Wir wollen eine Folge von Moleculs, die in einer mit diesen erzeugenden Linien (génératrices) parallelen Linie liegen, mit dem Namen Fiber bezeichnen.

Gesetzt, dieser Körper werde in der Richtung seiner Länge gezogen, oder gedrückt *), jedoch so, daß er in sich selbst wieder zurückgeht (à se refouler), ohne sich auf irgend eine Art zu biegen. In diesen beiden Fäl-

*) Einige Schriftsteller nennen absolut positiven und absolut negativen Widerstand, den Widerstand eines nach der Länge gezogenen oder gedrückten Körpers, und relativen Widerstand den, wenn der Körper auf seiner Länge perpendiculär belastet ist.

len werden alle Fibern gleichförmig verlängert oder verkürzt seyn, und man nimmt an, daß ihre Verlängerung oder Verkürzung der darauf wirkenden Kraft proportional ist.

Wenn ein ähnlicher Körper am einen Ende AB (Fig. 9.) eingelassen oder eingefugt (encastré), und am andern CD mit einem Gewicht C belastet ist, so sind in jedem mit der Länge des Stücks parallelen vertikalen Querschnitt, wie ABCD, die obern Fibern verlängert, und die des innern Theils nach Verhältniß ihrer Entfernung von einer Fiber, deren Länge gar nicht verändert ist, verkürzt. Wenn man das Stück durch eine Ebene EFGHIK perpendiculär mit seiner Länge schneidet, so werden diese Fibern von unveränderlicher Länge auf dieser Ebene eine Spur FI bilden, welche man die Linie des Durchgangs der Spannung bis zum Zusammendrücken nennen kann.

Coulomb *) nimmt an, daß, wenn die Krümmung des elastischen Körpers sehr wenig beträchtlich ist, diese Linie dergestalt placirt ist, daß die Summe der Spannungs-Momente der obern Fibern derjenigen gleich ist, welche man erhält, wenn man die Momente der Zusammendrückungen der innern Fibern hinzufügt. Diesen Grundsatz, welcher noch nicht streng bewiesen ist, haben alle Schriftsteller, welche von diesem Gegenstande handeln, angenommen. Es ist nicht nöthig, zu demselben seine Zuflucht zu nehmen, wenn es einen festen

*) Mémoires de l'Acad. des Sciences, année 1773.

Körper betrifft, dessen Querschnitt durch eine horizontale Linie in zwei symmetrische Theile theilbar ist. Diese gerade Linie ist also unstreitig die, wo der Durchgang der Spannung bis zur Zusammendrückung existirt. Selten hat man in der Praxis Körper von andern Gestalten zu berücksichtigen.

Bei dem durch die Wirkung des Gewichts C gekrümmten festen Körper ABCD (Fig. 9.), betrachten wir bloß den ursprünglich zwischen der Verticalebene EG und der unendlich nahen Ebene *) begriffenen Schnitt, und nehmen an, daß, mit Ausnahme dieses Schnittes, der ganze übrige Theil des Körpers eine unveränderliche Form habe. Die Spannungen und Zusammendrückungen der Fibertheile, deren Länge durch die Dicke dieses Schnitts bestimmt ist, stehen mit der Wirkung des Gewichts C im Gleichgewicht. Die Spannung oder die Zusammendrückung einer Fiber ist ihrer Entfernung von der Linie des Durchgangs der Spannung bis zur Zusammendrückung proportional. Wir nehmen in der Ebene des Schnitts diese Linie selbst für die Axe von x, und ziehen auf dieser Ebene eine Axe von y perpendiculär mit der erstern.

Eine Fiber in der Einheit der Entfernung von der Axe von x, deren ursprüngliche Länge = 1, habe nach ihrer Verlängerung eine Länge = 1 + v.

a sey das Gewicht, welches ein Bündel von Fi-

---

*) Ich nehme die Ebene als unendlich nahe (infinement voisin), damit die Spannung und die Zusammendrückung in der Dicke des Schnitts gleichförmig seyn mögen.

bern, das die Einheit der Oberfläche zum Querschnitt hat, unterstützen kann, und zwar vermöge einer seiner ursprünglichen Länge gleichen Verlängerung.

Alles dieses vorausgesetzt, betrachten wir eine Fiber, deren Querschnitt das Rechteck dxdy ist; so wird ihre Verlängerung, proportional mit der Entfernung von der Linie des Durchgangs der Spannung bis zur Zusammendrückung, oder von der Axe von x, vy seyn; die Kraft oder die Spannung, proportional dieser Verlängerung und der Oberfläche des Querschnitts der Fiber wird $= avydxdy$, und das Moment dieser Spannung $= avy^2dxdy$.

Die Summe der Momente der Spannungen aller Fibern wird seyn

$$\frac{av}{3}\int y^3dx;$$

welches Integral in den Gränzen desjenigen Theils des Querschnittes, der oberhalb der Linie des Durchgangs von der Spannung bis zur Compression liegt, genommen wird.

Die Summe der Momente der Zusammendrückungen wird ebenfalls

$$\frac{av}{3}\int y^3dx$$

seyn. Das Integral zwischen den Gränzen desjenigen Theils des Querschnittes genommen, in welchem die Fibern zusammengedrückt sind.

Nach dem von Coulomb aufgestellten Grundsatze sind diese beiden Integrale unter sich gleich. Das eine heiße S und das andere S^1, so ist

$$S^1 = S.$$

Ferner, da diese Spannungen und Zusammendrükkungen das gekrümmte Stück durch das Gewicht C wieder in die ursprüngliche Lage zu versetzen streben, so ist das Moment dieses Gewichts gleich der Summe der Momente der Spannungen und der der Compressionen; mithin

$$\frac{av}{3}(S + S^1) = C \times DG.$$

Die Integrale S und S^1 sind constant von einem Ende des Körpers bis zum andern.

Die Größe v ist, wie man leicht einsieht, gleich $\frac{1}{r}$, indem r der Halbmesser der Krümmung der Fiber von unveränderlicher Länge ist. Nennt man daher $\frac{a}{3}(S + S^1) = A$, eine durch einen und denselben elastischen Körper beständige Größe, so hat man

$$\frac{A}{r} = C \times z.$$

Diese Gleichung, welche andeutet, daß der Halbmesser der Krümmung der Fiber von unveränderlicher Länge, für jeden Punkt, im umgekehrten Verhältniß der Entfernung dieses Punkts bis zu dem belasteten Ende sich befindet, gerade wie es bei der elastischen Platte der Fall ist.

Wir wollen jetzt zu den durch die Theorie bereits aufgefundenen Eigenschaften einer elastischen Platte zurückgehen, und untersuchen, ob sie sich auch auf elastische feste Körper anwenden lassen.

2. Elastische Platte, welche am einen Ende eingelassen, und am andern belastet ist.

BD (Fig. 12.) sey eine elastische Platte von der

Länge L, die an ihrem äußersten Ende mit einem Gewicht C belastet ist.

Wir betrachten einen Punkt G, und nehmen den Theil BG als ganz fest, so wie den Theil GD als straff (rigide) an, wodurch das Gleichgewicht nicht gestört wird. Das Gewicht C wird den Theil DG nach einer Richtung um den Punkt G herumzudrehen streben, und vermöge der Wirkung der Elasticität wird er in der entgegengesetzten Richtung gedreht. Dieser Effekt der Elasticität kann als der einer Kraft betrachtet werden, die perpendiculär auf das Element G der verlängerten Curve und in einer Entfernung von der Curve, welche wir mit der Einheit der Entfernung als gleich annehmen, wirkt. Diese, aus der Elasticität resultirende Kraft wachse proportional mit dem unendlich kleinen Winkel, den die beiden auf einander folgenden Elemente der Curve mit einander machen, oder welches dasselbe ist, im umgekehrten Verhältniß des Halbmessers der Krümmung. Diese Kraft heiße i für den Punkt der Platte, wo der Halbmesser der Krümmung = 1 ist; r sey der Halbmesser der Krümmung der Platte im Punkt G; so wird die Kraft, welche für diesen Punkt den Effekt der Elasticität vorstellt, $= \frac{i}{r}$. Die Momente dieser Kraft und die des Gewichts C um den Punkt G herum, sind gleich; setzt man die Linie GH = Z, so hat man die für die elastische Curve bekannte Gleichung

$$\frac{i}{r} = C\,(L - Z).$$

Da es hauptsächlich darauf ankommt, das Sinken

des belasteten Punktes zu kennen, so wollen wir dasselbe sofort untersuchen.

Der unendlich kleine Winkel der beiden auf einander folgenden Elemente (élémens consécutifs) im Punkte G, ist $\frac{dz}{r}$, vermöge der vorhergehenden Gleichung $= \frac{C \cdot (L - Z)dz.}{i}$

Verlängert man diese beiden Elemente bis zur Vertikallinie FD, so wird der Theil dieser letztern, welche solche auffängt

$$\frac{C \cdot (L - z)^2 \cdot dz.}{i}$$

seyn *), und man erhält die Summe aller dieser Theile, oder die Länge FD, wenn man das Integral der vorhergehenden Differentialgröße zwischen $z = O$ und $z = L$ nimmt. Es heiße daher f die Linie FD, so ist

$$f = \frac{CL^3}{3i} \text{ **)}.$$

---

*) Hierbei setze ich voraus, daß alle Elemente der Curve unendlich wenig von der Horizontallinie differiren, oder daß die Platte sehr wenig Krümmung habe.

**) Man suche das Sinken Y eines Punkts in der Entfernung Z von dem Ursprunge B.

Stellt man sich eine durch diesen Punkt gehende vertikale Linie vor, so werden die beiden auf einander folgenden Elemente im Punkt G der Curve, hinlänglich verlängert, einen Theil

$$\frac{C}{i}(L - z)(Z - z)zd$$

auffassen; das Integral dieser Größe, zwischen $z = o$

3. Elastische Platte, auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet.

Diese Platte übt auf jede ihrer Stützen eine Gewalt aus, die der Hälfte des in ihrer Mitte angebrachten Gewichts gleich ist. Man kann dieses Gewicht, ohne Verletzung des Gleichgewichts, durch eine über der Platte angebrachte feste Stütze, und jede von den äußersten Stützen durch eine von unten nach oben wirkende Kraft, die der Hälfte dieses Gewichts gleich ist, ersetzen.

Auch kann man, ohne das Gleichgewicht zu stören, annehmen, daß die eine Hälfte der Platte eine unveränderliche Lage habe, oder daß die andere als nur beweglich angenommene Hälfte an dem an die erste Hälfte stoßenden Ende eingelassen sey.

Dieses ist genau der in §. 2. untersuchte Fall.

Es sey 2L die Länge der auf zwei Stützen ruhenden Platte, und 2C das in der Mitte angebrachte Gewicht; wir werden alsdann, wie in §. 2., L für die Länge der am einen Ende eingelassenen halben Platte,

---

und z = Z genommen, wird die Länge Y seyn; man hat daher

$$Y = \frac{C}{2i}(LZ^2 - \tfrac{1}{3}Z^3),$$

die Gleichung für die elastische Curve, wenn man die Biegung als unendlich klein annimmt. Man erhält diese Gleichung und den Werth von f größer, wenn man die Gleichung für die elastische Curve, in der Voraussetzung einer unendlich kleinen Krümmung, integrirt.

und C als das auf das freie Ende wirkende Gewicht, haben; es werden ferner dieselben Gleichungen, wie in jenem §., für das Sinken des belasteten Punkts, und für die Curve dieser Platte, statt finden.

4. Elastische Platte, am einen Ende eingelassen (encastrée), und auf ihrer ganzen Länge gleichförmig belastet.

Es sey C (Fig. 14.) die Summe aller auf die Platte vertheilten Gewichte, und L die Länge dieser Platte.

Betrachten wir einen Punkt in der Entfernung z vom Anfange B, und nehmen, wie weiter oben, an, daß die Platte auf beiden Seiten dieses Punktes straff (rigide) wäre, so werden die Gewichte, welche die Platte um diesen Punkt zu biegen streben, diejenigen seyn, welche von diesem Punkte bis zu dem freien Ende vertheilt sind; die Summe derselben ist $C\frac{(L-z)}{L}$; ihr Hebelsarm $\frac{L-z}{2}$ und ihr Moment um den Punkt der Umdrehung $\frac{C(L-z)^2}{2L}$. Das Moment der die Elasticität vorstellenden Kraft ist, wie oben, $\frac{i}{r}$; ich habe daher für die Gleichung der Curve

$$\frac{i}{r} = \frac{C(L-z)^2}{2L}.$$

Für das Sinken des äußersten Punkts wird man auf eben die Weise wie oben, finden

$$f = \frac{CL^3}{8i} \; *).$$

*) Man findet ebenfalls auf dieselbe Weise für die Gleichung der Curve

$$Y = \frac{C}{2Li}\left(\tfrac{1}{2}L^2Z^2 - \tfrac{1}{3}LZ^3 + \tfrac{1}{12}Z^4\right).$$

5. Elastische Platte auf zweien Stützen, und der ganzen Länge nach gleichförmig belastet.

Betrachten wir einen Punkt e (Fig. 15.) dieser Platte, und nehmen an, daß die Theile eD und eD^{I} straff geworden sind, so wird das Gleichgewicht nicht weniger statt finden. Es seyen L und z die Linien BD und Be, und die Totalsumme der Gewichte für die ganze Curve sey 2 C.

Die auf dem Stück eD vertheilten Gewichte sind $\frac{C(L - z)}{L}$, und die auf dem Stück eD^{I} sind $\frac{C(L + z)}{L}$.

Da die auf eD vertheilten Gewichte, eD um den Punkt D zu drehen streben, so kann man ihnen eine ihrer Summe gleiche Kraft substituiren, welche durch den Mittelpunkt von eD geht, oder eine Kraft, die der Hälfte der vorigen gleich ist, und durch den Punkt e geht. Auch kann man die auf eD vertheilten Gewichte durch eine in e angebrachte Kraft, die der Hälfte ihrer Summe gleich ist, darstellen.

Ich habe daher in e die einzige Kraft C. Der in D und D^{I} ausgeübte Druck ist

$$\frac{C(L + z)}{2L} \text{ und } \frac{C(L - z)}{2L}.$$

Jetzt kann man, ohne das Gleichgewicht zu zerstören, eine feste Stütze oberhalb des Punkts e, und zwei von unten nach oben wirkende Kräfte auf die Punkte D und D^{I} annehmen, welche gleich sind

$$\frac{C(L + z)}{2L} \text{ und } \frac{C(L - z)}{2L}.$$

Das Moment dieser Kraft um den Punkt e wird,

wenn man den einen oder andern Theil derselben als fest annimmt, seyn

$$\frac{C(L^2 - z^2)}{2L};$$

und da das Moment der von der Elasticität um diesen nämlichen Punkt resultirenden Kraft wie vorhin $= \frac{i}{r}$ ist, so hat man für die Gleichung der Curve

$$\frac{i}{r} = \frac{C(L^2 - z^2)}{2L}.$$

Man findet auf eben die Weise, wie vorhin, für den Werth der Biegung (flèche)

$$f = \frac{5}{24}\frac{CL^3}{i} = \left(\frac{CL^3}{3i} - \frac{CL^3}{8i}\right);$$

welches gerade die Differenz der in §. 2 und 4. gefundenen beiden Werthe von f ist.

6. Elastische Platte auf zwei Stützen und in einem Punkt belastet, aber am einen oder an beiden Enden eingelassen (encastrée).

Man stelle sich anfangs eine unbestimmte Reihe elastischer Platten von gleicher Länge vor, und zwar in gerader Linie in solchen Entfernungen von einander, die ein wenig kleiner sind als die Länge von einer derselben; ferner stelle man sich ein zweites System von Platten vor, die den ersten durchaus gleich, und dergestalt auf letztere gelegt sind, daß sie die Zwischenräume derselben decken. In der Mitte von allen diesen Platten bringe man gleiche Kräfte an, die auf ihrer gemeinschaftlichen Richtung senkrecht, aber für die obersten

Platten von oben nach unten, und für die untersten von unten nach oben wirken.

Jede dieser Platten wird sich nach einer Curve biegen, die derjenigen ähnlich ist, für welche wir die Gleichung in §. 3. gefunden haben; diese Curven werden sämmtlich einander gleich seyn; sie sind von zwei Parallelen begränzt, welche sie sämmtlich in den Anwendungspunkten der Kräfte berühren, und eine tangirt die andere in Punkten, die in gleicher Entfernung von diesen beiden Parallelen bestimmt worden sind.

Man kann, ohne Nachtheil für das Gleichgewicht, annehmen, daß alle diese Platten in ihren Berührungspunkten mit einander unveränderlich verbunden sind; sie bilden alsdann eine elastische Platte von unbestimmter Länge, welche durch gleich weit entfernte, gleiche, mit ihrer Richtung senkrechte, aber wechselsweise nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kräfte getrieben wird.

Diese Platte bildet daher eine wellenförmige Linie, welche aus durchgehends gleichen Curven zusammengesetzt ist, und abwechselnd nach entgegengesetzter Richtung gedreht wird.

Betrachten wir jetzt eine dieser Curven und die beiden daran liegenden Hälften, und stellen uns den ganzen Rest des Systems als absolut fest vor, so wird das Gleichgewicht auf keine Weise unterbrochen. Dieses wird genau der in Fig. 17. dargestellte Fall mit einer an beiden Enden eingelassenen und in der Mitte belasteten Platte seyn; die beiden äußern Enden müssen gegen einander frei fortrücken können, welches man in

der Figur darzustellen gesucht hat. Es ist leicht einzusehen, daß das Sinken des belasteten Punkts den vierten Theil desjenigen beträgt, welches statt haben würde, wenn die äußern Enden frei wären.

Ein ähnliches Raisonnement, auf den in Fig. 16. dargestellten Fall, bei einer elastischen Platte angewandt, die bloß an dem einen Ende eingelassen, und auf zwei Drittel der Länge von da an gerechnet *) belastet ist, zeigt, daß das Sinken des belasteten Punkts $\frac{6}{27}$ desjenigen beträgt, welches im Mittelpunkt der Platte statt haben würde, wenn das Gewicht hier angebracht wäre, und wenn die beiden äußersten Enden frei wären **).

7. Elastische Platte, parallel mit ihrer Länge gedrückt.

Man muß zuvörderst annehmen, diese Platte habe

*) Damit das Raisonnement auf Fig. 16. eine genaue Anwendung finde, so muß die Curve, deren Convexität unterwärts gekehrt ist, ihre horizontale Sehne haben, und der belastete Theil muß anfangs nach einer, für jede der Belastungen determinirten Neigung placirt, und zugleich wie jene vermehrt werden. Weil aber die Krümmungen sehr klein sind, so hat die horizontale Lage des Stücks nur unendlich wenigen Einfluß auf das Resultat.

**) Auf eine ähnliche Weise läßt sich die Krümmung einer an beiden Enden eingelassenen, und gleichmäßig belasteten Platte suchen, wenn diese Krümmung sehr klein ist.

Man findet also, daß, wenn man die halbe Länge der Platte durch 1000 ausdrückt, der Punkt, wo die Krümmung Null ist, 422 vom äußern Ende ist, und daß das Sinken des belasteten Punkts beinahe $\frac{1}{5}$ desjenigen beträgt, welches statt haben würde, wenn die Enden frei wären.

ein Bestreben, sich nach einer Richtung mehr als nach der andern zu biegen, und wir wollen den Werth der Kraft suchen, die dieser Platte eine sehr kleine Krümmung mittheilen dürfte.

Da es immer der Fall seyn wird, daß die Tangente des Mittelpunkts der Curve mit der durch die beiden Endpunkte gehenden geraden Linie parallel ist, so kann man eine Platte BD (Fig. 12.) annehmen, die an dem Ende B eingelassen, und an ihrem freien Ende der Wirkung einer Kraft P unterworfen ist, deren Richtung beständig parallel mit BF.

Es sey E der Anfang der Coordinaten, EB die Axe von y, und ED die Axe von z.

Das Moment der Kraft P im Verhältniß zu einem Punkt G der Curve, ist Py; das der Kraft, welche die Elasticität vorstellt, im Verhältniß zu demselben Punkt, ist stets, wie oben, $\frac{i}{r}$; man hat also für die Gleichung der Curve,

$$\frac{i}{r} = Py.$$

Betrachtet man dz als constant, und als merklich gleich dem Differential des Bogens, so hat man

$$r = \frac{dz^2}{d^2y}, \text{ und } \frac{id^2y}{dz^2} = Py.$$

Auf beiden Seiten mit dy multiplicirt und integrirt, giebt

$$i\,\frac{dy^2}{dz^2} = P(y^2 - f^2).$$

Die willkührliche Constante ist bestimmt durch die Bedingung, daß zu gleicher Zeit

$$y = f, \text{ und } \frac{dy}{dz} = o.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$z \sqrt{\frac{P}{i}} = \text{Bogen}\left(\sin = \frac{y}{f}\right) + \text{const.}$$

Zu gleicher Zeit muß $z = o$ und $y = f$ seyn, welches giebt - - - const. $= - \frac{w}{2}$, wo w den halben Umfang bezeichnet, dessen Halbmesser 1 ist. Man hat daher

$$Z \sqrt{\frac{P}{i}} + \frac{w}{2} = \text{Bogen}\left(\sin = \frac{y}{f}\right),$$

oder

$$y = f \cdot \sin\left(z \sqrt{\frac{P}{i}} + \frac{w}{2}\right).$$

Zugleich muß $z = L$ (Fig. 12.) seyn (wo L die Länge der Platte BD vorstellt), und $y = o$; daher

$$\sin\left(L \sqrt{\frac{P}{i}} + \frac{w}{2}\right) = o,$$

oder

$$L \sqrt{\frac{P}{i}} + \frac{w}{2} = mw,$$

wo m irgend eine ganze Zahl ist.

Die Werthe von $m = o$ oder $= 1$, geben

$$P = \frac{w^2 i}{4 L^2}.$$

Für jeden Werth von P, welcher kleiner ist als diese Größe, krümmt sich die Platte nicht; wenn aber P diesen Werth überschreitet, so ist die Gleichung für die sich bildende Curve

$$y = f \cdot \sin \frac{w}{2}\left(\frac{-Z}{L} + 1\right);$$

der kleinste Werth von z, für welchen $y = o$, ist $z = L$.

Die Werthe von m, — 1 und 2 geben

$$P = \frac{gw^2 i}{4L^2};$$

die Gleichung der mit diesem Werthe von P correspondirenden Curve ist

$$y = f \cdot \sin \frac{w}{2}\left(\frac{-3z}{L^2} + 1\right);$$

y muß Null werden, nicht bloß weil $z = L$, sondern weil $z = \frac{L}{3}$; $z = o$ giebt $y = + f$, und $z = \frac{2}{3}L$ giebt $y = - f$. Dieser Fall ist der in Fig. 18., wo die gedrückte Platte für die dem gedrückten Punkt zunächst liegenden zwei Drittheile das Bestreben hat, sich nach einer, das übrige Drittheil aber sich nach der andern Richtung zu biegen. Also, für jeden Werth, kleiner als $P = \frac{gw^2 i}{4L^2}$, krümmt sich die Platte nicht, und bei einem Werthe von P, ein wenig größer als diese Größe, ist die Curve dieselbe, deren Gleichung am letztern Orte gegeben ist, und welche Fig. 18. darstellt.

Betrachtet man in Fig. 18. nur die zwei innern Drittheile, so befindet sich dieser Theil in denselben Umständen, wie eine elastische Platte, welche von einem Ende bis zum andern durch eine Kraft von constanter Richtung gedrückt, und deren Enden, so eingelassen wären, daß sie ihre unveränderlichen Tangenten haben, sich, die eine im Verhältniß zu der andern, unterdessen von der sie im ersten Moment verbindenden geraden Linie entfernen könnten. Die Kraft, welche fähig ist, die Platte zu biegen, ist alsdann dieselbe, als wenn die beiden Enden frei wären.

Ferner, wenn die Enden (Fig. 19.), obgleich solche unveränderliche Tangenten haben, gezwungen wären, sich von der sie im ersten Moment verbindenden geraden Linie nicht zu entfernen, so würde man auf eine der weiter oben entwickelten ähnlichen Methoden finden, daß die Platte die Form annimmt, welche Fig. 19. zeigt, und daß mithin das zum Biegen erforderliche Gewicht vier mal größer seyn wird, als wenn die Enden frei wären.

8. Verhältniß des Widerstandes einer mit ihrer Länge perpendiculär oder parallel gedrückten Platte.

In §. 3. haben wir gefunden, daß wenn eine Platte von der Länge 2L, in der Mitte mit einem Gewicht 2C belastet, die Biegung, welche dieselbe annimmt, durch die Gleichung

$$f = \frac{CL^3}{3i}$$

ausgedrückt wird; i ist die von der Elasticität herrührende Kraft.

Nach §. 7. ist der Ausdruck des Gewichts P, welches dieselbe Platte von der Länge 2L, wenn solche von einem Ende bis zum andern gedrückt wird, zum Biegen bringt,

$$P = \frac{w^2 i}{4L^2};$$

i ist dieselbe Größe, wie vorhin.

Wenn wir diese Größe i in diesen beiden Gleichungen wegschaffen, so ist

$$P = \frac{w^2}{24} \cdot \frac{2C}{f} L = 0,41 \cdot \frac{2C}{f} L.$$

Diese Gleichung giebt P, mittelst $\frac{2C}{1}$, oder des Verhältnisses der Querbelastungen zu den Biegungen, welche sie hervorbringen. Dieses Verhältniß ist nach dem oben angegebenen Ausdrucke von f constant.

Die Gleichung, welche wir so eben gefunden haben, giebt mittelst dieses Verhältnisses das Gewicht, welches eine elastische Platte zum Biegen bringt, indem es solche aufrecht drückt. Die zur Ausmittelung dieser Gewichte anzustellenden Versuche sind schwierig, und geben viele Gelegenheit zu Irrthümern; im Gegentheil ist es leicht, die Biegungen zu messen, welche durch die auf die Länge einer elastischen Platte perpendiculär wirkenden Gewichte hervorgebracht werden. Es ist vortheilhaft, zwischen diesen beiden Gattungen von Versuchen eine Beziehung zu haben.

9. Anwendung der für eine elastische Platte gefundenen Resultate auf einen prismatischen festen Körper.

Wir haben gesehen (§. 1.), daß ein auf die Länge eines prismatischen festen Körpers perpendiculär wirkendes Gewicht, einige der Längenfibern desselben verlängert, indem es andere verkürzt, und daß es zwischen denselben Zwischenfibern giebt, welche ihre ursprüngliche Länge beibehalten.

Wenn der feste Körper (solide) einen Querschnitt hat, welcher durch das Verhältniß zu einer geraden horizontalen Linie symmetrisch ist, so ist diese gerade Linie der Querschnitt aller Fibern von unveränderlicher Länge.

Noch haben wir gesehen, daß die eine dieser Fi-

dern genau die Krümmung der elastischen Platte berührt.

Dasselbe ist auch jedes mal der Fall, wenn die auf irgend eine Art angebrachten Gewichte, mit der Richtung des Körpers perpendiculär sind.

Auf diese Körper können wir die Resultate des zweiten und der folgenden §§., bei einer an den Enden eingelassenen oder nicht eingelassenen, und auf ihrer Länge mit willkührlich vertheilten Gewichten, deren Richtung jedoch mit der der Platte perpendiculär ist, belasteten elastischen Platte anwenden.

Wenn aber ein elastischer fester Körper parallel mit seiner Länge belastet ist, so kann man ihn nicht mehr mit Genauigkeit, wie im vorhergehenden Falle, mit einer elastischen Platte vergleichen.

Man schneide diesen Körper durch zwei einander unendlich nahe Ebenen, die auf dessen Länge perpendiculär sind. Wenn das Gewicht, welches diesen Körper belastet, zu schwach ist, um ihn zum Biegen zu bringen, so werden die Theile der durch diese beiden Ebenen begränzten Fibern gleichförmig zusammengedrückt seyn. Sie werden es ungleichförmig seyn, wenn bei vermehrtem Gewicht, das Stück sich zu krümmen anfängt. Auch wird es bald der Fall seyn, wenn das Stück im Verhältniß zu seiner Dicke sehr lang ist, daß die Theile der auf der converen Seite des gekrümmten Stücks liegenden Fibern, sich verlängert haben, und es giebt in diesem letztern Falle, wie in §. 1. eine Linie des Durchgangs der Spannung bis zum Zusammendrücken; es ist indeß leicht einzusehen, daß solche nicht

auf dieselbe Art existirt, und daß ihre neue Lage, welche sie auch sey, für den Widerstand der Fiberntheile zwischen zwei unendlich nahen Ebenen einen größern Werth geben wird. Die Kraft eines aufrecht gedrückten prismatischen festen Körpers scheint daher größer zu seyn, als die einer elastischen Platte, welche quer durch belastet, dieselbe Kraft haben würde.

Um zu einem streng genauen Ausdruck zu gelangen, müßte man das Problem vollständig auflösen. Man muß aber bedenken, daß die Stücke von Eisen, die uns zu diesen theoretischen Betrachtungen veranlaßt haben, in der Anwendung, im Verhältniß ihrer Länge immer sehr dünn sind, und daß aus diesem Grunde ihr Widerstand sich dem einer elastischen Platte sehr nähert.

Man kann, mit hinlänglicher Genauigkeit für die Ausübung (wie es auch die Versuche bestätigen) die im §. 7. in Hinsicht einer parallel mit ihrer Länge belasteten elastischen Platte gefundenen Resultate, auf dünne und lange prismatische feste Körper anwenden.

Die einzige Abänderung in den für die elastische Platte gefundenen Formeln ist die, daß man die Größe i in A verwandelt, welche die elastische Kraft des festen Körpers in Hinsicht seiner Materie und seiner Form vorstellt (siehe §. 1.).

Da wir nur solche feste Körper betrachten, deren Querschnitt im Verhältniß zu einer geraden horizontalen Linie, welche sich als die Linie des Durchgangs der Spannung bis zum Zusammendrücken findet, symmetrisch ist, so haben wir solche als Axe von x angenom-

men, und die Größe A ist das Integral $\frac{2a}{3}\int y^3 dx$ für die eine Hälfte des Schnitts.

Die beiden Formeln, welche wir auf feste Körper von verschiedenen Gestalten anwenden werden, sind bloß die in §§. 3 und 7., nämlich:

$$f = \frac{CL^3}{3A} \text{ und } P = \frac{w^2 A}{4L^2}.$$

Es ist hinreichend, den Werth von A, für jeden besondern Fall zu suchen.

Wir wollen nun zur Anwendung dieser Formeln auf feste Körper von verschiedenen Formen übergehen.

10. Fester Körper, dessen Querschnitt ein Rechteck ist.

1) Auf zwei Stützen ruhend und in der Mitte belastet.

Es sey 2L die Länge, 2C das in der Mitte angebrachte Gewicht, l die Breite, oder die Dimension in horizontaler Stellung, und e die Dicke des Körpers.

Wir nehmen den Fall, wo $A = \frac{2a}{3}\int y^3 dx$. Hier ist $y = \frac{e}{2}$, und man muß das Integral von $x = 0$ bis $x = l$ nehmen; man hat daher

$$\int y^3 dx = \frac{le^3}{8},\ A = \frac{ale^3}{12} \text{ und } f = \frac{4CL^3}{ale^3}.$$

Man sieht hieraus, daß die Biegung im Verhältniß des Gewichts, des Würfels der Länge, und im umgekehrten Verhältniß der Breite und des Würfels der Dicke statt hat.

2) Parallel mit der Länge belastet.

Das Gewicht, welches fähig ist, das Stück zum Biegen zu bringen, wird hier

$$P = \frac{w^2 A}{4L^2} = \frac{w^2 a l e^3}{48 L^2} = 0{,}2056.\, a \frac{l e^3}{L^2}.$$

Das erforderliche Gewicht, um ein rectanguläres Stück zum Biegen zu bringen, indem es aufrecht drückt, ist also im directen Verhältniß der Breite und des Würfels der Dicke, und im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Länge *).

11. Fester Körper, dessen Querschnitt ein Kreis ist.

1) Auf zwei Stützen ruhend und in der Mitte belastet

Es sey 2L die Länge des festen Körpers, R der Halbmesser des Kreises, den sein Querschnitt bildet, und 2C das in der Mitte angebrachte Gewicht.

In dem Integral $\int y^3 dx$ sind hier y und x respective R cos z und R sin z, (z ist in dem Kreise, dessen Halbmesser 1, der correspondirende Bogen des Punkts, dessen Ordinaten x und y sind). Dieses Integral wird daher

*) Für einen festen Körper, dessen Querschnitt ein Viereck ist, findet man durch den Calcul und durch Versuche, daß dieser Körper denselben Widerstand äußert, wenn er auf einer flachen Seite oder auf einer scharfen Kante ruht. Dasselbe geschieht bei jedem symmetrischen festen Körper, im Verhältniß, daß 4 Ebenen unter sich Winkel von 45° bilden.

$$R^4 \int \cos^3 z \, d \sin z,$$

welches, integrirt von $z = -\frac{w}{2}$ bis $z = \frac{w}{2}$, giebt

$$\tfrac{3}{8} w R^4 .$$

A wird $\frac{1}{4} w a R^4$, und $f = \frac{4CL^3}{3waR^4}$.

Man sieht, daß die Biegung im directen Verhältniß des Würfels der Länge, und im umgekehrten der vierten Potenz des Halbmessers oder des Durchmessers statt findet.

2) Parallel mit der Länge belastet.

Durch den vorhergehenden Werth von A hat man

$$P = \frac{w^3 a}{16} \cdot \frac{R^4}{L^2};$$

Die Kraft, welche fähig ist, einen Cylinder zu biegen, indem sie aufrecht drückt, ist also im directen Verhältniß der vierten Potenz des Durchmessers, und im umgekehrten des Quadrats der Länge.

Man kann gewiß seyn, daß der Widerstand eines Cylinders sich zu dem des denselben umschreibenden vierwinklichen Prisma verhält, wie $\frac{3}{8}w$ zu 2, oder wie 6w zu 32, oder wie die $\frac{3}{4}$ des Volumens des Cylinders zum ganzen Volumen des Prisma.

12. System von zweien von einander abstehenden, aber doch vollkommen unter sich verbundenen Stücken (Fig. 26 und 26b.).

In diesem Falle muß man das Integral des als voll angenommenen Systems nehmen, und das Integral für das Verhältniß des leeren Raumes davon abziehen.

Wenn l die gemeinschaftliche Breite, E die ganze Dicke, und e die Dicke des unausgefüllten Raumes, so wird $\int y^3 dx = \frac{1}{8} l (E^3 - e^3)$;

woraus folgt, daß der Widerstand eines solchen Systems dem Unterschiede der Würfel der Totaldicke und des unausgefüllten Raumes proportional ist.

13. Hohle Cylinder, oder vierkantige und runde Röhren.

Man findet auf dieselbe Weise, daß, wenn 2C und 2c die äußern und innern Seiten einer vierkantigen Röhre sind, $\int y^3 dx = 2 (C^4 - c^4)$.

Und wenn R und r die äußern und innern Halbmesser einer runden Röhre, so wird in diesem Falle das Integral $\frac{3}{8} w (R^4 - r^4)$.

Der Widerstand einer vierkantigen oder runden Röhre ist also der Differenz zwischen den vierten Potenzen der Seiten oder der äußern und innern Durchmesser proportional.

§. II. Gewölbter Bogen, zwischen zwei festen Widerlagen, welcher in einem oder in mehrern Punkten belastet ist.

Die ersten Versuche mit elastischen Stücken von dieser Form haben gezeigt, daß, wenn ein Bogen mit geringer Krümmung im Scheitel (sommet) belastet ist, der Mittelpunkt sich abplattet, und die beiden äußersten Theile converer werden; ferner, daß die beiden Punkte, wo sich die Krümmung nicht ändert, merklich in dem Drittheil des Bogens liegen.

Vermöge dieser Bemerkung hat man den untersuchten Bogen mit einem Stück des Polygons verglichen, welches sechs Seiten und fünf Winkel hat, wovon bloß drei mittelst elastischer Charniere beweglich sind, nämlich die der Mitte und der beiden Extreme; auch hat man angenommen, daß die anfängliche Krümmung des Bogens oder des Polygons sehr klein sey.

Ähnliche Betrachtungen hat man angewandt, wenn der Bogen in einem, oder in mehrern Punkten, außerhalb des Mittelpunkts belastet war.

Weil indeß diese Beobachtungen nicht streng sind, und auch kein Mittel darboten, die etwa begangenen Irrthümer wahrzunehmen, so hat man von den erhaltenen Resultaten nur diejenigen erwähnt, welche die Erfahrung zu bestätigen scheint; man findet sie in dem dritten Abschnitte dieser Schrift.

§. III. Elastische Körper, durch eine Kraft getrieben, welche dieselbe zu drehen strebt.

1. Cylinder.

Ein Cylinder von elastischer Materie (Fig. 29.) sey an dem einen Ende befestigt; abc stelle das andere Ende vor, in dessen Ebene das Gewicht K mit einem Halbmesser S wirkt, um den Cylinder zu drehen.

Natürlich kann man annehmen:

1) Daß in jedem Querschnitt, der Drehungswinkel für alle Molekűls dieses Schnitts gleich ist.

2) Daß dieser Winkel von einem Schnitt zum andern variirt, und im Verhältniß der Entfernung dieses Schnitts von dem festen Ende des Stücks wächst.

Dieses vorausgesetzt, betrachten wir eine der unendlich kleinen cylindrischen Röhren, deren Cylinder als zusammengesetzt betrachtet werden kann, und suchen den Widerstand dieser Röhre. Er hat zum Halbmesser r, und zur Dicke dr.

Es heiße g die wirkliche Länge des Drehungsbogens, auf den Umfang gemessen, dessen Halbmesser die Einheit ist, und in dem Abschnitt, dessen Entfernung von dem festen Ende der Einheit der Länge gleich ist.

Das Moment des Widerstandes jeder Röhre wird proportional seyn,

1) dem Drehungsbogen, welcher, für die Röhre, gleich rg;

2) der Anzahl der durch eine Section abgeschnittenen Materientheilchen, oder der Oberfläche dieser Section, welche $2\pi r dr$ ist;

3) dem Halbmesser desjenigen Endes, von welchem her die Fibern widerstehen, $= r$;

4) Einer Constante, welche von der elastischen Kraft der angewendeten Materie abhängt; wir wollen diese Constante h nennen.

Dieses Moment ist daher $2\pi hgr^3 dr$ für eine willkührliche cylindrische Röhre.

Das Moment des Widerstandes des ganzen Cylinders wird das Integral dieser Größe, von $r = 0$ bis $r = \frac{D}{2}$ genommen, seyn; d. i. $\frac{\pi hgD^4}{32}$, oder HgD^4, wenn man statt $\frac{\pi h}{32}$ eine andere Constante H setzt.

Vergleicht man das Moment des Widerstandes mit dem der Potenz, so ist

$$HgD^4 = KS,$$

oder

$$HgLD^4 = LKS.$$

gL ist das Maaß des Winkels, den das freie Ende des Cylinders vermöge der Wirkung des Gewichts beschreibt. Man sieht, daß dieser Winkel im directen Verhältniß der Länge des Cylinders, des wirkenden Gewichts und seines Hebelarms, und im umgekehrten Verhältniß der vierten Potenz des Durchmessers steht.

2. Hohle Cylinder.

Man braucht nur das vorhergehende Integral, in Bezug daß der Cylinder als gefüllt (massiv, plein) angenommen ist, zu nehmen, und das für den leeren oder unausgefüllten Raum davon abzuziehen.

Die Gleichung für das Gleichgewicht wird seyn, wenn D und d die äußern und innern Durchmesser heißen,

$$HgL (D^4 - d^4) = LKS.$$

Der durch das freie Ende beschriebene Winkel, indem sich solches um sich selbst dreht, ist der Differenz der vierten Potenzen der äußern und innern Durchmesser proportional.

3. Vierkantige Prismen.

Wenn die der Drehung unterworfenen Stücke nicht rund sind, so wird es schwierig, den Calcul auf deren Widerstand anzuwenden. Die äußern Fibern des eingeschriebenen Cylinders nehmen sowohl an dem Widerstande derjenigen dieses Cylinders, als auch an dem ei-

nes elastischen Körpers, der am einen Ende eingelassen, und am andern belastet ist, Antheil.

Da bei vierkantigen Prismen die Zahl dieser äußern Fibern des eingeschriebenen Cylinders wenig beträchtlich ist, so hat das auch auf die Kraft desselben wenig Einfluß. Wahrscheinlich ist der Widerstand, welchen ein vierkantiges Prisma der Drehung entgegensetzt, proportional der vierten Potenz der Seite seines Querschnitts, welches auch die Erfahrung zu bestätigen scheint.

Zweiter Abschnitt.

Versuche.

Erste und zweite Reihe.

Versuche mit Stücken von geschmiedetem Eisen, die gerade und ohne Verbindung waren, und perpendiculär und parallel mit ihrer Länge gedrückt wurden.

Erste Reihe: Stücke von Eisen, die nach der Quere belastet wurden (Fig. 23.).

Jedes Stück lag horizontal auf zweien Stützen, und war in der Mitte mit Gewichten beschwert, welche man nach und nach vermehrte. Das allmählige Zunehmen der Biegung wurde mittelst eines in einem vertikalen graduirten Schieber beweglichen Winkelmaaßes gemessen. Damit die Bewegung dieses Winkelmaaßes sehr sanft, und dasselbe sich während des Versuchs nicht auf das Eisen auflegen konnte, so war es durch einen über einen oberhalb des Schiebers befindlichen Kloben gehenden Faden unterstützt, welcher ein mit dem Winkelmaaße gleich schweres Gewicht trug.

Die folgenden Versuche vereinigen sich sämmtlich dahin, um jene, durch die Theorie angezeigte, und den elastischen Körpern zugehörige Eigenschaft zu bestätigen

nämlich, daß die Biegungen eines Stücks Eisen den Gewichten, womit dasselbe belastet ist, proportional sind, oder, welches dasselbe ist, daß gleiche Zunahmen des Gewichts die Biegung um gleiche Größen wachsend machen. Hiervon habe ich nur den Versuch Nro. 2. ausführlich mitgetheilt. Für alle andern zeigt die 9te Columne das größte Gewicht an, womit jedes Stück beschwert war. Gemeiniglich wurde die Elasticität bis zu dieser Gränze nicht gestört; eine besonders beigesetzte Bemerkung zeigt das Gegentheil.

Die Stäbe ließ ich hämmern, um sie gehörig vorzurichten. Auch habe ich ganz unbearbeitete Stäbe, so wie man sie aus den Hammerhütten erhält, untersucht, und dieses jedes mal angezeigt.

Die geringste Dicke der probirten Stücke war 0,005 Meter und die größte 0,108 Meter.

Wenn ein Stück lang und dünn ist, und unter den geringern Gewichten beträchtliche Biegungen annimmt, so erfahren die Enden desselben, indem sie auf den Stützen gleichsam zu gleiten gezwungen werden, eine Reibung, wodurch die Biegungen bedeutend vermindert werden können. Um diese Ursache zur Unrichtigkeit zu vermeiden, bediente ich mich für solche Stücke, die im Verhältniß ihrer Länge dünn waren, solcher Stützen wie Fig. 31., deren oberer Theil mit einer Rolle versehen war, wobei die Zapfen sorgfältig eingeölt waren.

Zweite Reihe der Versuche: Stücke, welche am Ende gedrückt werden.

Im ersten Abschnitte haben wir gesehen, daß eine am Ende gedrückte elastische Platte so lange widersteht, bis das Gewicht eine gewisse Gränze erreicht hat, über welcher hinaus das Stück sich plötzlich biegt. Mittelst des *folgenden* Apparats haben wir gefunden, daß auch die Eisenstangen diese Eigenschaft zeigen.

Ich ließ einen 3,20 Meter langen Hebel AB (Fig. 24.) dergestalt vorrichten, daß derselbe auf 0,045 Meter Dicke gegen die Umdrehungsaxe 0,122 Meter, und auf 0,037 Meter gegen dessen Ende 0,08 Meter stark gemacht wurde. Dieser Hebel, auf die hohe Kante gestellt, hatte seinen Stützpunkt unter einem starken Balken. Das obere Ende der Stücke befand sich in einem unter dem Hebel angebrachten leichten Einschnitt; der Mittelpunkt dieses Einschnitts war 0,16 Meter vom Mittelpunkt der Umdrehung entfernt, so daß ein auf die Waagschale gelegtes Gewicht P, am Ende B des Hebels, auf das Stück einen Druck von 20 P hervorbrachte.

Die Breite des Stücks wurde nach der Richtung der Länge des Hebels gelegt, so daß das Stück sich in der durch den Hebel gehenden Vertikalebene nicht biegen konnte.

Die Enden eines jeden Stücks ließ ich dergestalt abrunden, daß der Hebel auf dem Mittelpunkt und nicht auf den Seitenflächen des Stücks trug, wodurch sonst wegen des ungleichen Drucks der Widerstand gestört seyn würde.

Damit der Hebel beim Wegnehmen der zum Versuch bestimmten Stangen horizontal blieb, so wurde derselbe durch ein Gewicht C unterstützt, welches dem zum Gleichgewicht des Hebels erforderlichen gleich war, weniger einem Gewicht, wobei der Hebel durch die geringste Ursache zum Sinken gebracht, oder die Reibung gegen den Bolzen A überstieg. Ich habe den Werth dieses letztern Gewichts nicht beibehalten, welcher für diesen besondern Fall das Verhältniß der Reibung zum Druck gegeben hätte. Nimmt man an, daß die Reibung sich auf die der Axe reducirt, so findet man, daß man, um den daraus herrührenden Widerstand zu überwinden, ungefähr $\frac{1}{25}$ des Gewichts auf die Waagschale legen müsse. Aus den folgenden Tabellen ist ersichtlich, daß die durch die Versuche gegebenen Zahlen der 11ten Columne, allgemein größer sind, als die der 10ten Columne nach der Theorie. Der mittlere Unterschied ist $\frac{1}{7}$ der ersten Zahlen (s. Note 3.). Wahrscheinlich ist solcher theils der Reibung, theils der im ersten Abschnitt §. 1. Art. 9. angegebenen Ursache beizumessen.

Diese Versuche mit am Ende gedrückten Stücken konnten nur ungefähr mit der Hälfte der nach der Quere belasteten Stücke angestellt werden. Die geringste Dicke dieser am Ende gedrückten Stücke ist 0,011 Meter, und die größte 0,0318 Meter.

Um die zu den Versuchen der zweiten Reihe gehörenden Zahlen zu unterscheiden, so sind solche in Parenthesen eingeschlossen.

Die Tabellen stellen die angegebenen Zahlen vor, wie sie durch den Calcul angezeigt werden. Die For-

meln, wornach sie berechnet sind, finden sich in dem dritten Abschnitte.

Versuch Nro. 1.

Ein Stück vierkantiges Eisen, von 0,02 Meter Seite wurde kalt nach einem Cirkelbogen gekrümmt, so daß zwei Seiten eben blieben. Auf diese beiden Seiten hatte man mit der Axe des Stücks perpendiculäre Linien, 0,025 Meter von einander abstehend, gezogen. Nach und nach bekam das Stück drei Krümmungen, so daß auf eine Länge von 0,30 Meter im Bogen, die Biegung 0,022 Meter, 0,037 Meter und 0,038 Meter betrug. Die auf den flachen Seiten gezogenen Linien blieben gerade und auf das Stück senkrecht, und die Verlängerung des convexen Theils fand sich gerade gleich mit der Verkürzung des concaven Theils:

Für eine Biegung von { 0, 022 Meter / 0, 037 = / 0, 058 = } war diese Verlängerung auf eine Länge von 0,30 Meter im Bogen gleich { 0, 005 Meter / 0, 010 = / 0, 0175 = }, oder per Meter { 0,0167 Mtr / 0,0333 = / 0,0583. = }

Dieser Versuch zeigt, daß die Fibern des Eisens eine Verlängerung oder eine Verkürzung erlitten haben, die ihrer Entfernung vom Mittelpunkte des Stücks proportional ist, und daß folglich dasselbe Gewicht, welches auf eine Fiber parallel mit ihrer Länge wirkt, sey es durch Vorwärts- oder Zurückziehen, solche um dieselbe Größe verlängert oder verkürzt. Daher hatten

die Fibern ihre elastische Kraft verloren. Die Eigenschaft, welche sie darstellen, existirt daher in viel größerm Verhältniß, wenn die Wirkung, welche sie erlitten haben, diese Elasticität nicht zerstört hat.

Dritte Reihe.

Versuche mit geraden Stücken von geschmiedetem Eisen, die in gewisser Entfernung mit einander verbunden, und mit ihrer Länge senkrecht belastet sind.

Die beiden Stücke der sieben folgenden Versuche waren jedes 4,03 Meter lang, 0,06 breit und 0,01055 Meter dick; sie hatten 11 Löcher von 0,02 Meter Durchmesser, für die Bolzen, womit beide Stücke zusammen geschlossen wurden. Diese konnten unmittelbar oder in einer Entfernung von 0,01 M.; 0,02 M.; 0,03 Meter, einander gegenüber stehen, mittelst der Unterlager von 0,01 Meter und 0,02 Meter, durch welche die Bolzen gingen, und so nach und nach oder auf einmal zusammen gebracht werden (Fig. 26.)

Die drei ersten Versuche wurden bloß in der Absicht angestellt, um die Kraft des einen dieser Stücke einzeln zu bestimmen.

Bei den durch Bolzen züsammen verbundenen Stücken, war man, außer den im Anfange der Versuche mit isolirten Stücken beschriebenen Vorsichtsregeln, darauf bedacht, die Schraubenmuttern der Bolzen so stark als möglich anzuziehen, und vor dem Versuche das ganze System mit einem Gewicht zu belasten, das diejenigen, für welches man die Biegungen beobachtet hatte, überstieg. Die Absicht war, die Bol-

te 34 und 35 einzubinden.

und (3), Fig. 23b.

	5.
c	Bieg. unter 10 Kil durchd. Vers. bestimmt
MM.	
10	7. 6
14	
18	
21	
25	
29	
33	
37	
41	
44	
47	
51	

f zeigte denselb
uf eine flache Se
terzesetzt seyn. Es folg
Linie des Durchgan
Zusammendrücken
einem Querschnitt
Momente der
nitt

8.

ar

Ser

in
2,5
,71
30

0
0
0
0
1
2
2
2

2

T... 34 und 35 einzubinden.

1	8.	9.	
Num...			...ngen
d... Ver...	...ammen ... Versuch.	Größtes Gewicht, womit das Stück belastet war	...n der Versuche.
	...imeter	Kilogram.	
	...,57	35	
	...,71	80	
	...36	5	...gr. weg, so fehlten 0,001 ... Gestalt wieder bekam.
			...ggenommen, so fehlten 0,003

70	Taff. Stk., an...	0,082	0...
69	Stahl von ders...	0,32	0...
68	Taff. Stk., an...	0,073	0,...
67	Stahl von ders...	0,34	0,...
66	Taff. Stk., an...	1,55	1...
65	Stahl von ders...	2,62	2...
64	Taff. Stk., an...	2,14	2...
63	Stahl von ders...	3,03	2,...
62	Dasselbe St... schmalen...	1,65	2...
61	Deutsch. Brenn... Forstman u. J... für Massivme...	5,71	
60	Taff. Stk., a. d. ...	8,48	8,...
59	Engl. Gußstahl, weich und zäh ... man, vollkom... härtet, aber doch ...	43,07	32...

ewicht von 2400 Kilogr. brachte das Stück zum schnel-
gen, ohne daß solches vorher eine Einbiegung angenom-
tte. Beim zweiten Versuch bog es sich in S unter 2500

Stück hatte, ehe es sich unter 1200 Kilogr. bog, keine
ung angenommen. In der Quere mit 50 Kilogr. bela-
g es an, seine Elasticität zu verlieren.

Eisen war von schlechter Qualität, kaltbrüchig und zu-
auch rothbrüchig; es zeigte viele Sprünge.

n Ende gedrückte Stück bog sich durchgehends unter 1320
, ohne vorheriges Einbiegen.

ersuch wurde gemacht, ehe man den Apparat zum ge-
Messen der Biegungen vorgerichtet hatte.

n Ende gedrückte, und mehemals untersuchte Stück bog
gestalt, daß die Ebene der Krümmung sowohl durch zwei
ngesetzte, als durch zwei benachbarte Kanten ging. Bei
nen dieser Versuche war das Stück im Anfange seiner
ung zum Theil nach dieser letztern, zum Theil nach der
gekrümmt.

Eisen ist sehnig (nerveux) und weniger weich, als das
rd.

gedrückte Stück bog sich plötzlich.

…en Seite 34 und 35 einzubinden.

2	7	8	9
…der Sys… …angestellt	Biegung unter 10 Kilogrammen nach		Größtes Gewicht der Belastung
	dem Calcul	d. Versuch	
	M.M.	M.M.	Kilogramm.
…nes der	113,55	=	=
…ewicht d…	(139,95)	(136)	=
	14,19	14	25
ähnliche… ohne Z…	1,70	1,6	200
…mengesch…	1,70	1,6	200
…der geleg…	7,10	7	40
…usammen…	12,52	11,5	45
…ttelst d… …hend	4,24	4,57	70
…e 0,021	2,06	2,6	150
…inander	1,15	1,8	200
…easkreuz	0,241	0,275	400
…e von 0,0… …ttelst 11	2,08	2,2	100

zen auf den Rändern der Löcher ruhen zu lassen, damit die Stücke nicht auf einander hin und her rutschten. Die zum Versuch bestimmten Gewichte wurden dann mehrmalen aufgelegt, abgenommen und wieder aufgelegt, um gewiß zu seyn, daß die durch diese Gewichte erzeugten Biegungen einzig und allein von der Zusammendrückung oder von der Spannung der Fibern, nicht aber von dem Hin- und Herrutschen der Stücke herrührten.

Zum Versuche (Nro. 80.) bediente man sich derselben Stücke, welche man auf 6,03 Meter Länge stützte, und solche mittelst 15 Andreaskreuze in 0,153 Meter große Räume theilte; die Enden dieser Kreuze waren mittelst Bolzen mit den Stücken auf 0,40 Meter Entfernung zusammengeschlossen (Fig. 26b.).

Der Reihe dieser Versuche sind noch diejenigen beigefügt, welche auf dem Brückenbauhofe zu Bordeaux mit zwei Systemen von Stücken aus geschmiedetem Eisen, welche die Gestühle oder die Theile von zwei auf einander folgenden Schlußstücken eines Brückenbogens bilden (Fig 32. 33.), angestellt worden sind.

Anmerk. Man findet im dritten Abschnitt die Formeln, nach welchen die Zahlen der 7ten Columne berechnet sind.

Bemerkungen über Versuch 73 und 74.

Die Stücke haben, den Bolzenlöchern gegenüber, eine beträchtlichere Breite, als in den Zwischenräumen; dieses vermehrt ihren Widerstand, wenn sie auf die schmale Seite gelegt werden.

Über die sechs letzten Versuche.

Je mehr die Entfernung der durch Bolzen zusammengeschlossenen Stücke vergrößert wird, desto größer differirt der Widerstand des durch sie gebildeten Systems von demjenigen, welchen die Theorie anzeigt. Da die durch die Bolzen gezwängten Stücke hin und her zu schwanken streben, so werden erstere, vermöge ihrer Elasticität, an den Köpfen schief, indem sie eine Einbiegung annehmen, die sich mit dem Gewicht der Belastung des Systems vergrößert. Diese Einbiegung ist um desto größer, je mehr die Stücke von einander abstehen. Dieser Effekt äußert sich nicht merklich, wenn die beiden Stücke durch sogenannte Andreaskreuze zusammengeschlossen sind.

Versuche mit Systemen von geschmiedetem Eisen, die gleichsam Gestühle, oder Theile von zwei auf einander folgenden Schlußstücken eines Brückenbogens bilden.

1. Gestühle (Voussoir) modellirt nach denen, welche zum Bau der Brücke von Cobzac vorgeschlagen sind.

Die 32ste Figur zeigt die Gestalt und die Dimensionen dieses Gestühls, so wie die Stellung, in welche man dasselbe gebracht hat, um es vertikal zu belasten. Es bestand aus sehr sehnigem Eisen von Perigord.

Hr. Vauvilliers, Oberinjenieur des Brückenbaues zu Bordeaux, ließ zum Druck dieses Gestühles einen einfachen und sinnreichen Apparat vorrichten, bei

welchem die Reibung sehr unbeträchtlich wär, so daß der hervorgebrachte Druck mit ziemlicher Genauigkeit berechnet werden konnte.

Dieser Druck betrug 108000 Kilogrammen. Auch nicht das mindeste Zeichen, daß das Gestühle unter der Belastung verrückt worden wäre.

Berechnet man den Widerstand dieses Gestühles nach den in dieser Abhandlung enthaltenen Formeln, und nimmt man die Kraft der Stücke A durch die zusammenhaltenden Stücke und die solche verbindenden Bänder verdoppelt, an, so findet sich dieser Widerstand ungefähr zu 140000 Kilogrammen.

2. System von Stücken aus geschmiedetem Eisen, welches man als einen Theil eines Brückenbogens (arche) betrachten kann.

Dieses in Fig. 33. dargestellte System war von rothbrüchigem Eisen des Landes. Es wurde, mittelst desselben Apparats, einem Drucke von 108000 Kilogr. unterworfen, ohne daß es sich unter dieser Belastung bog. Man bemerkte indeß in den einzelnen Theilen ein plötzliches, wiewohl geringes Krachen, welches eine Bewegung der Stücke und eine Ungleichheit des Widerstandes derselben andeutete. Der Mangel der diagonalen Stücke in den Verticalebenen war der Solidität dieses Systems nachtheilig.

Bei der Berechnung des Widerstandes dieses Systems, und wenn man die Stärke der zusammengekuppelten Stangen F vervierfacht annimmt (sie würde achtfach seyn, wenn die Bolzen zahlreicher wären), findet

man diesen Widerstand beinahe = 112000 Kilogrammen.

Vierte Reihe.

Versuche mit einem Bogen oder gewölbten Stücke geschmiedeten Eisens, von gleichförmiger Dicke und Breite, zwischen zwei Stützen der festen Widerlagen, und an einer oder mehrern Stellen belastet.

Es wurde ein Stück von 6,52 Meter Länge, 0,06 und 0,02 Meter stark geschmiedet.

Um die Sehne dieses Bogens zu bilden, bediente man sich eines Stück Eisens, auf welchem in der Entfernung von 6,32 Meter, zwei eiserne Unterlagen mit Bolzen befestigt waren, um dem Bogen beim Versuch als Stützen oder Widerlagen zu dienen.

Auf einer ebenen Sohle wurde ein Bogen gezogen, dessen Sehne 6,32 Meter und dessen Biegung 0,70 Meter betrug; das vorbesagte Stück wurde kalt gehämmert, bis es vollkommen mit der gezogenen krummen Linie zusammen traf. Hierauf brachte man diesen Bogen zwischen die Unterlagen, welche die Enden desselben bilden sollten, so daß die Sehne horizontal zu liegen kam.

Das Gewicht des Bogens, wenn derselbe vertical zwischen seine Widerlagen gestellt wurde, veränderte die Gestalt desselben nicht merklich.

Man war darauf bedacht, daß die Gewichte, womit man einen Punkt dieses Bogens belastet hatte, nur auf diesen einzigen Punkt wirkten.

Sowohl am Bogen als an der Sehne desselben wurden die jeder Ordinate correspondirenden Punkte,

wenn der Bogen noch nicht belastet war, bemerkt, und sie wurden zwischen diesen Punkten beständig gemessen.

Versuch Nro. 82.

Der Bogen war in der Mitte belastet.

Das in der Mitte des Bogens angebrachte Gewicht	0 Kil.	20 Kil.	120 Kil.	220 Kil.	260 Kil.	280 Kil.	288 Kil.
Correspondirende Biegungen des ganzen Bogens	709 MM.	705 MM.	675 MM.	641 MM.	620 MM.	597 MM.	Der Bogen hatte sich in entgegengesetzt. Richtung gebogen.
Senkung des belasteten Punkts	0	4	34	68	89	112	
Biegungen durch diese verschiedenen Gewichte, für das Drittheil des ganzen Bogens	0	5	32	59	69	75	

So wie die Gewichte aufgelegt wurden, plattete sich die Mitte ab, und die Seiten erhoben sich. Endlich, im Augenblick, wo der Bogen sich nach der Mitte in entgegengesetzter Richtung unter 288 Kilogr. einbog, war das dritte Theil der Mitte merklich horizontal. Wenn man die Gewichte wegnahm, so erhob sich der Bogen, aber die Biegung des ganzen Bogens, statt auf 709 Millimeter wieder zu kommen, stieg nur bis 630 Millimeter.

Bemerkungen und Folgerungen.

Man ist auf den Gedanken gekommen (s. den dritten Abschnitt), daß der Bogen unter dem dreifachen Gewicht, welches der Biegung des ganzen Bogens correspondirt, sich biegen müsse.

Dieses Gewicht ist = = =	98	Kilogrammen.
Das Dreifache dieses Gewichts	294	=
Das Gewicht, unter welchem der Bogen sich bog, ist = = =	288	=

Versuch Nro. 83.

Der Bogen war noch in der Mitte belastet.

Erste Tafel, welche die Ordinaten der in 18 gleiche Theile getheilten Curve, und die Biegungen der kleinen Bogen, deren Länge zwei dieser Theile beträgt, und zwar Ordinaten und Biegungen (in Millimetern), welche correspondirend sind einem Drucke von

0 Kilogr.		50 Kilogr.		100 Kilogr.		150 Kilogr.		200 Kilogr.		250 Kilogr.	
Ord.	Bieg.	Ord.	Bieg.	Ord.	Bieg.	Ord.	Bieg.	Ord.	Bieg.	Ord.	Bieg.
0		0		0		0		0		0	
154	11	154	10	158	11	160	11	162	11	165	12
286	8	288	9	293	9	298	11	302	11	306	13
402	12	405	13	409	12	415	14	420	15	421	16
494	6	496	7	500	7	504	9	507	10	514	16
573	10	574	11	576	12	575	12	574	13	575	19
631	11	629	11	627	11	621	11	614	11	597	8
667	7	662	7	655	6	644	6	632	6	604	5
689	8	681	8	670	6	654	4	638	3	602	1
694	10	684	8	672	7	655	6	637	4	602	3
678	7	670	7	659	6	643	4	628	4	597	0,5
648	7	642	7	634	7	623	7	610	4	591	5
603	8	600	9	595	8	589	9	583	10	575	11
542	10	540	8	540	10	537	10	535	9	537	12
461	5	463	6	465	7	465	7	468	9	474	9

0 Kilogr.		50 Kilogr.		100 Kilogr.		150 Kilogr.		200 Kilogr.		250 Kilogr.	
Drd.	Bieg.	Drd.	Bieg.	Drd.	Bieg.	Drd.	Bieg.	Drd.	Bieg.	Drd.	Bieg.
370	9	373	9	375	10	378	10	383	12	392	14
260	7	264	8	265	7	270	11	274	11	281	12
136	6	139	7	140	7	140	5	143	6	147	6
0		0		0		0		0		0	

Zweite Tafel, vorstellend die Biegungen der drei Drittheile des ganzen Bogens, unter einem Druck von Kilogr.

	0	Diff.	50	Diff.	100	Diff.	150	Diff.	200	Diff.	250
Das $\frac{1}{3}$ der einen Seite	78	3	90	5	95	9	104	9	113	9	122
Das $\frac{1}{3}$ der Mitte	77	8	69	8	61	11	50	12	38	22	16
Das $\frac{1}{3}$ der andern Seite	68	5	73	4	77	6	83	8	91	13	104

Es wurden noch 20 Kilogrammen hinzugesetzt. Diese Belastung von 270 Kilogr. verursachte, daß die Gewichte leicht die Erde berührten; man nahm sie daher weg, um das Seil zu verkürzen, welches solche trug. Indeß hatte man beim Wiederanbringen derselben nicht gehörige Aufmerksamkeit gehabt, sie genau in die Mitte zu legen. Die Gewichte zogen mehr auf die schwächere Hälfte, deren Biegungen unten in den beiden Tafeln stehen. Diese Hälfte plattete sich ab, und die andere erhob sich (bombée).

Als die Gewichte weggenommen wurden, nahm der Bogen seine erste Gestalt wieder an, jedoch nur mit einer Biegung von 670 Millimeter.

Bemerkungen und Folgerungen.

Die Biegungen von allen Unterabtheilungen, deren Länge $\frac{1}{9}$ des ganzen Bogens beträgt, unter dem verschiedenartigen Drucke, welchem man sie aussetzte, zeigen genau die Veränderungen der Krümmung an, die in verschiedenen Punkten des Bogens statt gefunden hat.

Man sieht, daß die ungefähr auf einem Drittheil des Bogens angebrachten Punkte die Krümmung nicht verändern. Die beiden Seitendrittheile erhöhen sich, und das mittlere Drittheil wird platt, wie aus der zweiten Tabelle bequemer zu ersehen ist.

Der Bogen bog sich dieses zweite Mal unter 270 Kilogr. (der Calcul — s. den vorhergehenden Versuch — zeigte 294 Kilogr.); er wurde indeß durchaus nicht wieder gerade, und bog sich alsbald zufällig.

Dritte Tafel.

	Unter einem Druck von				
	50 Kil.	100 K.	150 K.	200 K.	250 K.
	Mill.	Mill.	Mill.	Mill.	Mill.
Verminderung der Biegung des mittlern Drittheils	8	16	27	39	61
Senkung des Mittels vom ganzen Bogen	10	22	39	67	92
Biegungen durch diese verschiedenen Belastungen, für das Drittheil des ganzen Bogens.	13	27	40	53	67

Versuch Nro. 84.

Der Bogen wurde in zwei Punkten, auf ⅙ von jeder Seite, von den Enden an gerechnet, belastet. Die äußern Drittheile, in deren Mitte die Gewichte angebracht waren, wurden platt, und das mittlere Drittheil erhöht (bombé). Auf die eine Seite brachte man 280, und auf die andere 285 Kilogr.; die Gewichte berührten leicht die Erde, welches die Vermehrung derselben verhinderte. Das Stück hätte, ohne dieses, noch ein wenig mehr tragen können. Es war nahe am Biegen. Die äußern Bogen waren beinahe in gerader Linie.

Bemerkungen und Folgerungen.

Der Calcul zeigte 294 Kilogr. (s. Versuch N. 82) für den Ausdruck des Gewichts, wodurch der Bogen sich biegen müßte, es mogte solches auf dem mittlern Drittheil, oder auf jedem der beiden äußern Enden angebracht seyn.

Versuch Nro. 85.

Der Bogen war in einem einzigen Punkte, ¼ von einem Ende desselben an gerechnet, belastet.

Tafel der Ordinaten der in 4 Theile getheilten Curve, und der Biegungen der durch zwei Theile derselben gebildeten Bogen, unter einem Druck von:

	Kil. 0		Kil. 20		Kil. 100		Kil. 120	Kil. 140	Kil. 150	Kil. 160	Kil. 170
	Ord. Mill.	Bieg. Mill.	Ord. Mill.	Bieg. Mill.	Ord. Mill.	Bieg. Mill.	Ord. Mill.	Ord. Mill.	Ord. Mill.	Ord. Mill.	Ord. Mill.
	0		0		0		0	0	0	0	0
Belasteter Punkt —	538	190	530	180	485	134	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)
	696	177	700	182	702	192	(*)	(*)	695	690	685
	499	151	506	156	535	184	550	557	567	570	575
	0		0		0		0	0	0	0	0

*) Das Seil, woran die Gewichte hingen, verhinderte die Beobachtung dieser Ordinaten.

Setzte man 7 Kilogr. hinzu, so brachte der Druck von 177 Kilogr. den Bogen zum Biegen. Die gedrückte Hälfte war beinahe in gerader Linie.

Bemerkungen und Folgerungen.

Das Gesetz Nro. XXI. (3ter Abschnitt) zeigt, daß das Gewicht, welches fähig ist, den Bogen zu biegen, wenn es im Viertel von dessen Länge, von einem Ende an gerechnet, angebracht ist, zwei Mal dem der Biegung 0,70 Meter des ganzen Bogens correspondirendem Gewichte gleich seyn müsse.

Dieses letztere Gewicht ist = =	98	Kilogr.
Das Doppelte davon = = =	196	=
Der Bogen beugte sich unter =	177	=

Fünfte Reihe.

Versuche mit Stücken Eisen von verschiedener Form, welche am einen Ende fest erhalten werden, und auf deren anderes Ende Gewichte wirken, um sie drehend zu machen.

Die Stücke waren am einen Ende in einem unbeweglichen Schraubstock festgehalten, und ruheten mit dem andern frei auf dem Rande eines im Mittelpunkte eines hölzernen Kreises, dessen Umfang in 360° getheilt war, gemachten Loches. An diesem freien Ende waren die Stücke ganz an dem graduirten Kreise, und mittelst eines eisernen Durchschlags und 4 starker Druckschrauben, war ein Kloben befestigt, um welchen herum die Gewichte aufgehängt waren, die man hier zum Drehen der Stücke angebracht hatte. Ein auf den Rand des Klobens vortretender Stift, zeigte, vermittelst des graduirten Kreises, an, um wieviel sich der Kloben und

mithin das Ende des in Untersuchung befindlichen Stücks, gedreht hatte.

Der zwischen die Backen des Schraubstocks eingezwängte Theil der Stücke gab dennoch der Anstrengung der Gewichte etwas nach, indem er sich zwischen diesen Backen drehte, deren Zähne auf der Oberfläche der Stücke Furchen zurückließen. Der Winkel, unter welchem sich das freie Ende des Stücks vom Anfang der Bewegung an um sich selbst gedreht hatte, ist daher aus dem Winkel der Umdrehung des eingezwängten Theils, und dem Winkel der Drehung des außerhalb des Schraubstocks befindlichen Theils zusammengesetzt. Diesen letztern Winkel hat man genau, wenn man jedesmal die zum Drehen des Stücks angebrachten Gewichte wegnimmt, und die winkelförmige Größe mißt, auf welche das freie Ende von selbst, durch die bloße Kraft des außerhalb des Schraubstocks befindlichen Theils zurückgeführt wird.

Jeder Versuch wurde nicht bloß durch Untersuchung der Stücke nach beiden Richtungen angestellt, sondern diese Versuche mehrmale wiederholt; das Mittel aus den erhaltenen Resultaten ist in diesen Tabellen enthalten.

In dem dritten Abschnitte findet man die Formeln, nach denen die Constanten H und M berechnet sind.

Versuch Nro. 86.

Rundes Eisen aus Perigord, so wie es aus dem Hammer kommt. Ganze Länge 3,04 Meter; die Länge des gedrehten Theils 2,81 Meter; der gemessene Durchmesser 0,0142 Meter; nach dem Gewichte berechnet 0,0152 Meter.

Der Hebelsarm der am Ende angebrachten Gewichte 0,31 Meter.

1	2	3	4	5	6	7
Am Ende angebrachtes Gewicht	Beobachtete Winkel			Winkel für jedes Gewicht	Winkel, den Gewichten proportional	Bemerkungen und Folgerungen.
	Den Gewichten correspondirend		wenn man die Gewichte wegnimmt.			
	in der einen Richtung	in der andern Richtung				
Kil.						
0	99°		—	—	—	Für die Länge 2,81 Met., G = 13,4°.
5	92		99°	7°	6,7°	Für die Länge 10 M., G = 47,7°.
10	86		99	13	13,4	Nach der Formel $wHGd^4 = LKS$, die Constante H = 12, 57.
15	74		94	20	20,1	
20	48¾		75½	26¾	26 8	
25	22		55½	33½	33,5	

Versuch Nro. 87.

Rundes Eisen aus Perigord, so wie es vom Hammer kommt. Totallänge 3,38 Meter; Länge des gedrehten Theils 3,17 Meter; gemessener Durchmesser 0,0197 Meter; nach den Gewichten berechnet 0,0196 Meter. Hebelsarm der am Ende angebrachten Gewichte 0,32 Meter.

1	2	3	4	5	6	7
Am Ende angebrachtes Gewicht	Beobachtete Winkel			Winkel für jedes Gewicht	Winkel, den Gewichten proportional	Bemerkungen und Folgerungen.
	Den Gewichten correspondirend		wenn man die Gewichte wegnimmt.			
	in einer Richt.	in der andern				
Kil.						Für die Länge 3,17 Met., G = 6°.
0	39°					
5	36	36°	39°	3°	3°	Für die Länge 10 M., G = 18. 9.
10	33½	33	39	5¾	6	Nach der Formel $wHGd^4 = LKS$, die Constante H = 11. 47.
15	30¾	29¾	39	8¾	9	
20	27¾		38¾	11	12	
25	24¼		38½	14¼	15	
30	20⅓		38	17½	18	
35	17½		37¾	20¼	21	
40	11½		35½	24	24	
45	8		35	27	27	
50	0¾		32	31¼	30	

Wir wollen jetzt von allen folgenden Versuchen nur die Resultate darstellen, ohne das Einzelne der Versuche selbst mitzutheilen.

Länge gleiche Größe zu verlängern.

Dritter Abschnitt.

Gesetze des Widerstandes des geschmiedeten Eisens, oder Resultate der vorhergehenden Versuche.

Anmerk. Für die Einheit der Länge ist das Millimeter, und für die des Gewichts, das Kilogramm angenommen.

Im ersten Abschnitte haben wir gesehen, daß alle Formeln für den Widerstand elastischer fester Körper eine Constante A enthalten, welche von der Kraft der Elasticität des zu betrachtenden Körpers abhängt.

Die Versuche der ersten Reihe (mit Ausnahme von Nro. 6 und 7.), und die Versuche 71 und 72 der dritten Reihe, geben für den mittlern Werth dieser Constante a in Bezug auf 25 untersuchte Stäbe, die Zahl 20,43. Das Maximum ist 24,922 und das Minimum 16,121.

Zur Bequemlichkeit der Rechnung habe ich a = 20000 angenommen.

Man muß sich erinnern, daß wir a das Gewicht genannt haben, welches fähig ist, ein elastisches Stück, dessen Querschnitt ein Quadrat, daran die Seite die Einheit der Länge ist, um eine seiner ursprünglichen Länge gleiche Größe zu verlängern.

a = 20000 ist mit folgendem Ausdruck gleichbedeutend: Ein Meter Stabeisen, wenn es am obern Ende vertikal aufgehängt ist, verlängert sich um ein Zehntheil eines Millimeters, wenn das untere Ende durch ein Gewicht von 2 Kilogrammen für jedes Quadratmillimeter eines Durchschnitts gezogen wird *).

Das Eisen besitzt, wie die andern elastischen Körper, die Eigenschaft, sich nach Verhältniß der auf dasselbe einwirkenden Kraft auszudehnen, nur innerhalb gewisser Gränzen. Es kann (s. die 2te Anmerk.) sich um drei Zehntausendtheile seiner anfänglichen Länge ausdehnen oder zusammendrücken, ohne etwas von seiner Elasticität zu verlieren. Aus diesem und dem vorhergehenden Resultat folgt, daß ein Stab geschmiedetes Eisen, er werde gezogen oder gedrückt, von seiner Elasticität nur so viel verliert, als das darauf wirkende Gewicht nicht über 6 Kilogrammen für das Quadratmillimeter des Querschnitts (Section) beträgt.

Bedingung I und II.

Gerade Stäbe, von regelmäßigen Dimensionen, und ohne Zusammenfügung.

I. Bedingung.

Die Stäbe perpendiculär mit ihrer Länge belastet.

I. Wenn ein Stab mit seinen Enden horizontal

---

*) Diese Verlängerung giebt nach der bekannten Formel, für die Geschwindigkeit des Klangs im Eisen, 5018 Meter in der Sekunde.

auf zwei Stützen ruhet, so sind die durch die in der Mitte des Stabes angebrachten Gewichte erzeugten Biegungen (flèches) proportional, in sofern solche wenig beträchtlich sind.

II. Für zwei rectanguläre Stäbe von ungleichen Dimensionen, sind die Biegungen unter einem und demselben Gewicht, im geraden Verhältnisse der Würfel der Längen, und im umgekehrten der Breiten und der Würfel der Dicken (indem man Dicke diejenige Dimension nennt, welche vertikal gestellt ist). Für einen Stab von 2 Meter Länge, 0,10 Met. Breite und 0,01 Met. Dicke, beträgt die Biegung unter 10 Kilogrammen 0,01 Meter. Dieser Ausdruck ist gleichbedeutend mit der Formel

$$f = 0{,}0000125 \cdot \frac{CL^3}{l\,e^3} \cdot$$

f, L, l und e bezeichnen die Biegung, die Länge, die Breite und die Dicke des Stabes in Millimetern ausgedrückt, und C das in der Mitte angebrachte Gewicht in Kilogrammen.

III. Die größte Biegung, welche man einem Stabe geben könnte, ohne seine Elasticität zu stören, ist im geraden Verhältnisse des Quadrats seiner Länge, und im umgekehrten der Dicke desselben. Wenn die Länge 2,00 Meter und die Dicke 0,01 Meter beträgt, so ist diese Biegung 0,02 Meter. Dieser Ausdruck ist durch die Formel $F = 0{,}00005 \cdot \frac{L^2}{e}$ bezeichnet.

Anmerk. Dieses Gesetz gilt nicht allein für rectanguläre Stäbe, sondern auch für runde, für Systeme, zusammengesetzt aus verschiedenen von ein=

ander abstehenden, aber unter sich verbundenen Stücken, so wie für hohle, runde oder vierkantige Röhren, indem e durch die größtmöglichste vertikale Dimension ersetzt wird.

IV. Der Widerstand eines runden Stabes steht im umgekehrten Verhältniß des Würfels seiner Länge, und im geraden Verhältniß der vierten Potenz des Durchmessers. Für einen 2 Meter langen Stab, von 0,02 Meter Durchmesser, ist die Biegung unter 10 Kilogrammen = 0,01061 Meter, welches gleich der Formel

$$f = 0{,}00002122 \frac{CL^3}{d^4}.$$

V. Die Biegung durch das Gewicht, des Stabes allein, oder durch ein Gewicht, welches auf die Länge des Stabes gleichförmig vertheilt wird, beträgt nur $\frac{5}{8}$ derjenigen, welche dasselbe Gewicht, im Mittelpunkt angebracht, hervorbringen würde.

VI. Ist ein horizontal liegender Stab am einen Ende eingelassen oder befestigt (encastrée), und an dem andern Ende mit einem Gewicht beschwert, so ist das Sinken am belasteten Ende gleich der Biegung, welche ein doppeltes Gewicht hervorbringen würde, wenn es im Mittelpunkte eines gleich breiten und dicken, aber doppelt so langen, auf zwei Stützen ruhenden Stabes angebracht wäre.

VII. Die Biegung durch das Gewicht einer horizontalen, am einen Ende festen Stange allein, oder durch ein auf deren Länge gleichförmig vertheiltes Gewicht, ist gleich $\frac{3}{8}$ derjenigen, welche dasselbe Gewicht am freien Ende derselben hervorbringen würde.

VIII. Ein vierkantiger Stab, mit scharfen Kanten, widersteht in der Ebene der beiden entgegengesetzten Kanten eben so sehr, als in der Ebene von einer seiner Seiten.

IX. Wenn ein, horizontal auf zwei Stützen ruhender Stab, an beiden Enden eingelassen oder festgemacht ist, oder eine unveränderliche Richtung hat, jedoch so, daß die Enden sich frei einander nähern können: so ist das Sinken, welches durch ein in der Mitte des Stabes angebrachtes Gewicht verursacht wird, gleich $\frac{1}{4}$ desjenigen, welches Statt haben würde, wenn die Enden des Stabes frei wären.

II. Bedingung.

Gerade Stäbe, ohne Zusammenfügung, parallel mit ihrer Länge belastet.

X. Ein rectangulärer, am Ende gedrückter Stab widersteht so lange, bis das Gewicht, durch welches derselbe in der kleinsten Dimension eine Krümmung erhält, der Breite und dem Cubus der Dicke proportional, und im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Länge ist. Dieses Gewicht beträgt für eine vierkantige Stange von 1 Meter Länge und 0,01 Meter Seite $164\frac{1}{2}$ Kilogrammen.

XI. Das Gewicht, welches einen runden Stab zum Biegen bringt, indem es solchen am Ende drückt (Versuch 58.), ist $P = \frac{9689 \cdot 5d^4}{L^2}$. Dieses Gewicht steht, wie man sieht, im geraden Verhältnisse der vierten Potenz des Durchmessers, und im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Länge. Für einen Stab

von 1 Meter Länge und 0,01 Meter Durchmesser beträgt dieses Gewicht 96 Kilogr. 895 Millièmen.

XII Zu Folge des Gesetzes VIII. (Versuch 50 und 52.), biegt sich ein viereckiges, am Ende gedrücktes Stück, ohne Unterschied, so daß die Ebene der Curve durch zwei Kanten geht, oder auch mit einer der Seiten parallel ist.

XIII. Wenn bei einem am Ende gedrückten Stücke, die eine von dessen Extremitäten eingelassen oder befestigt ist, und die andere sich bloß in der geraden Linie, welche die beiden Enden verbindet, bewegen kann, so ist das Gewicht, welches solche zum Biegen bringt, gleich $\frac{9}{4}$ desjenigen, welches erforderlich seyn würde, wenn das Stück nicht eingelassen (encastrée) wäre.

XIV. Wenn die beiden Extremitäten eingelassen (fest) sind, so ist das Gewicht, welches das Stück zum Biegen bringt, indem solches am Ende drückt, vier mal größer als wenn sie es nicht sind.

XV. Wenn ein am Ende gedrücktes Stück in seiner Mitte unterstützt ist, so krümmt es sich in Gestalt eines S (Fig. 20 und 24.), und das biegende Gewicht (Versuch 13 und 20.) ist 4 mal größer, als wenn das Stück durchaus frei wäre.

III. Bedingung.

Systeme, zusammengesetzt aus Stücken von Eisen, die zwar vollkommene Verbindung unter sich haben, aber zugleich leere Zwischenräume darstellen.

XVI. Wenn zwei rectanguläre Stücke, von gleichen Dimensionen (Fig. 26; 26b und 27.), mit einan-

der dergestalt verbunden sind, daß sie durch ein Zwischenmittel (Versuch 77, 78, 79, 80, 81.) getrennt erhalten werden, und die Stücke sich weder einander nähern noch auseinander weichen können, so verhält sich der Widerstand des Systems in der Ebene, welche die beiden Stücke schneidet, zu dem Widerstande desselben Systems, als voll betrachtet, wie $E^3 - e^3$ zu E^3, wo E die Totaldicke und e die des leeren Raumes vorstellt.

XVII. Der Widerstand einer hohlen, runden oder vierkantigen Röhre, verhält sich zum Widerstande einer gleichen massiven Röhre, wie $D^4 - d^4$ zu D^4, woselbst D und d die Durchmesser oder die äußern und innern Seiten der Röhre bezeichnen.

Anmerk. Um das erste dieser Gesetze auf ein aus zwei von einander abstehenden Stücken zusammengesetztes System, welches am Ende gedrückt wird, anzuwenden, so darf sich solches nur in der Ebene biegen, welche die beiden Stücke schneidet.

IV. Bedingung.

Ein Bogen oder ein von Natur gewölbförmiges Stück, von gleichförmiger Breite und Dicke, wenig Krümmung, dessen Extremitäten auf unveränderlichen Stützen ruhen.

Anmerk. Wir werden zuvörderst die Biegung zu bestimmen haben, welche ein bestimmtes Gewicht an einem geraden Stabe von denselben Dimensionen wie der ganze Bogen, dessen beide Enden auf zwei Stützen ruhen, verursachen würde. Wir werden sie Biegung durch das und das Ge-

wicht, für den Bogen oder für den und den Theil des Bogens nennen. — Hat dieser gerade Stab, durch die Einwirkung des Gewichts, eine Biegung erhalten, die derjenigen gleich ist, welche der Theil des Bogens, dessen Länge der Stab hat, nach seiner natürlichen und ursprünglichen Krümmung darstellt, so werden wir dieses Gewicht das mit der ursprünglichen Biegung des Bogens, oder mit dem und dem Theile desselben correspondirende Gewicht nennen.

XVIII. Wenn der Bogen in der Mitte belastet wird, so wird das dritte Theil der Mitte platt, und die beiden andern werden convexer. Das Sinken des belasteten Punkts ist, wenn die Gewichte wenig bedeutend sind, beinahe gleich der Biegung durch die zusammendrückenden Gewichte für das Drittheil des Bogens (Versuch 82 und 83., Fig. 22 und 28).

XIX. Wenn das mittlere Drittheil des Bogens gerade wird, welches unter dem dreifachen Gewicht für die ursprüngliche Biegung des ganzen Bogens statt findet, so biegt sich dieser in der entgegengesetzten Richtung. (D)

XX. Bringt man ein Gewicht auf jede Seite des Bogens, in die Mitte der äußersten Drittheile (Versuch 84.), so werden diese Theile platt, und das mittlere Drittheil wird convex. Der ganze Bogen biegt sich endlich, nachdem jedes der äußern Drittheile gerade wird, welches bei dem dreifachen Gewicht für die anfängliche Biegung des ganzen Bogens Statt hat.

XXI. Der günstigste Punkt, wo man einen Bogen belasten kann, ist im Viertel der Länge, von einer seiner Extremitäten an gerechnet (Versuch 85.); die Biegung der nicht belasteten Hälfte vermehrt, und die der andern vermindert, bei wenig beträchtlichen Gewichten, die Biegung durch die auf die Hälfte des ganzen Bogens drückenden Gewichte um eine beinahe gleiche Größe. Endlich wird die belastete Hälfte durchgehends platt, und bestimmt die Inflexion des ganzen Bogens in entgegengesetzter Richtung, unter dem doppelten mit der anfänglichen Biegung dieses Bogens correspondirenden Gewicht.

Ueber die Gesetze XVIII und XXI.

Nach dem Raisonnement und der Beobachtung ist das Sinken des belasteten Punkts schwächer, als es hier angegeben ist. Der Ausdruck des Gesetzes nimmt also den Widerstand des Bogens kleiner an, als er in der That ist.

V. Bedingung.

Eisenstangen mit einwirkenden Gewichten, um dieselben zum Drehen zu bringen.

XXII. Der Drehungsbogen einer runden Stange ist gegeben durch die Formel (Versuch 86 bis 97.)

$$11{,}33 \, . \, Gd^4 = LKS;$$

G ist hier dieser Bogen in sechzigtheiligen Graden ausgedrückt, D und L der Durchmesser und die Länge des Stücks, S der Hebelsarm des am Ende angebrachten Gewichts, in Metern, und K das Gewicht selbst in Kilogrammen ausgedrückt.

XXIII. Für eine hohle cylindrische Röhre muß man in dieser Formel d^4 statt $D^4 - d^4$ setzen, wo D und d die äußern und innern Durchmesser vorstellen.

XXIV. Für ein viereckiges Stück ist die Formel (Versuch 98 bis 101.):

$$16Gc^4 = LKS;$$

wo c die Seite des Vierecks, in Millimetern.

XXV. Für eine hohle viereckige Röhre muß in dieser Formel c^4 statt $C^4 - c^4$ gesetzt werden, wo C und c die Seiten des äußern und innern Vierecks sind.

Bemerkungen über die vorstehenden Gesetze, in Hinsicht auf die Ausübung.

Ueber die Gesetze II und X.

Die Vergleichung der Versuche, welche auf diese Gesetze geleitet haben, mit denen, wovon im 4ten Abschnitt: von Eisen, das in der Richtung seiner Länge gezogen wird, gehandelt werden wird, scheint die Vermuthung zu begründen, daß in dieser letztern Gattung von Versuchen die Qualität *) des Eisens auf den Widerstand desselben, wenn solches zu Balken oder als vertikale Stützen angewandt wird, einen weit größern Einfluß habe.

---

*) Unter den versuchten Stäben verdienen einige englische bemerkt zu werden, welche nicht unter dem Hammer geschmiedet, sondern gleichsam gestämpt oder geformt zu seyn schienen, als sie noch weich waren. Die Dichtigkeit und der Widerstand derselben sind geringer als die der andern Eisensorten.

Ueber das Gesetz X.

Die dritte Anmerkung zeigt, daß das Verhältniß der Länge zur Dicke für die am Ende gedrückten Stücke zwischen 100 und 87 variirte. Bei zwei Versuchen des Hrn. Rondelet ist dieses Verhältniß 24. Es sind noch andere Versuche nöthig, um zu bestätigen, ob das Gesetz X. noch unterhalb dieser letztern Gränze eine hinlängliche Genauigkeit gewährt.

Ueber das Gesetz XVI.

Es sey 1 die Summe der Dicken zweier Stücke, und v die Entfernung derselben von einander, so wird der Widerstand dieses Systems $1 + 3 (v + v^2)$ seyn, wenn man den Widerstand des nicht getheilten Stücks zur Einheit annimmt. Macht man $v = 7{,}25$, wie es bei dem Versuche 80 der Fall ist, so giebt der Calcul 179 für den Widerstand des Systems. Bei Vergleichung des Versuchs 80 mit Vers. 72., findet man für diesen Widerstand 155, welcher um $\frac{1}{9}$ von 179 differirt. Dieser Unterschied muß der unvermeidlichen Biegung der liegenden Kreuze, womit das System verbunden war, zugeschrieben werden.

Man hat die Kraft, welche ein aus zwei von einander abstehenden Stücken zusammengesetztes, jedoch vollkommen verbundenes System annimmt, bereits in Betracht genommen, ohne sie jedoch in Werthen auszudrücken. Ein Beispiel dieser Systeme sind die viereckigen Röhren, von denen weiter unten die Rede seyn wird *); sie zeigen zugleich das vollkommenste Verbin-

*) Hr. Debaudre, Ober-Injenieur der Brücken zu Bor-

dungsmittel zwischen den das Obere und das Untere der Röhre bildenden Stücken. Man braucht daher nur das Obere und das Untere der viereckigen Röhre beizubehalten, und diese beiden Eisenplatten, mittelst eines gußeisernen dazwischen auf die schmale Kante gestellten Stücks zu verbinden, welches letztere man durch Abschleifen möglichst leicht macht. Ein anderes Verbindungsmittel zwischen zwei von einander abstehenden Eisenstücken, ist das sogenannte Andreaskreuz, welches beim Vers. 80. angewandt worden. Der Generalinspector der Brücken und Straßen, Hr. Aubry und die Verfasser der Entwürfe aller nach der Zeit in Frankreich ausgeführten oder vorgeschlagenen eisernen Brücken haben dieses Verbindungsmittel zwischen den äußern und innern Seiten eines jeden Gewölbbogens adoptirt. Diesem Beispiele ist man bei dem Entwurfe der eisernen Brücke von Cubzac gefolgt, welche zu diesen Versuchen Anlaß gegeben hat.

Noch läßt sich die Auseinanderhaltung der Stücke auf die Art abändern, daß man einen festen Körper von gleichem Widerstande, nach den Formen einrichtet, die durch die von demselben auszuübenden Functionen bedingt sind, es sey als Balken, oder als vertikale Stütze.

Ein sehr sinnreiches, alle davon erwarteten Vortheile darstellendes System, ist von dem Baumeister

---

deaux hatte die Idee, die Langhölzer dieser Brücke durch eiserne vierkantige Röhren aus geschmiedeten Eisenplatten, zu ersetzen.

Hrn. Louis bei den eisernen Fußböden im Palais=Royal zu Paris, und im Theater zu Bordeaux angewendet worden, welches zahlreiche Nachahmung gefunden hat. Diese Fußböden (Fig. 27.), welche ungefähr 10 Meter Tracht haben, sind aus 2 Meter von einander entfernten Schlußstücken (fermes) zusammengesetzt. Jedes Schlußstück bildet einen Balken, und ist aus zwei 0,068 Met. breiten und 0,027 Meter dicken, auf die schmale Seite gestellten Stangen, zusammengesetzt. Das obere Stück ist in einen Bogen von 0,19 Meter Biegung gekrümmt, und zwischen zweien an den äußern Enden des zweiten angebrachten hervorspringenden Ecken gespannt. Dieses bildet die Sehne des Bogens. Diese beiden Stücke sind auf Distanzen von 0,65 Meter, mittelst eiserner Bügel unter sich verbunden. Zwischen dem Bogen und die Sehne werden an den Punkten, wo solche von den Bügeln umfaßt werden, eiserne Keile mit Gewalt eingetrieben. Die also zusammengesetzten Schlußstücke (fermes) sind durch flache, auf der hohen Kante stehende eiserne Querriegel verbunden. Eine Wölbung von Töpferarbeit füllt die durch die Schlußstücke und durch die Querriegel gebildeten Rahmen aus. Da die Schlußstücke seitwärts durch die Querriegel und durch das thönerne Gewölbe gut verwahrt sind, so muß man die Kraft derselben in vertikaler Richtung betrachten. Das obere Stück kann sich nicht zusammendrükken, ohne daß sich das andere ausdehnt, und man könnte dem obern Bogen eine solche Krümmung geben, daß das System der Bedingung eines gleichen Widerstandes vollständig Genüge leistete. Man kann dieses System be=

trachten, als wenn es überall die Höhe hat, wie in der Mitte. Der Widerstand, den es zeigt, ist gleich dem eines vollen (massiven) Stücks von derselben Dicke und Länge, und von 0,30 Met. Höhe, dessen Gewicht doppelt so viel betragen würde, als das des Systems. Hr. Rondelet erzählt in seinem Traité d'Architecture von Versuchen, die er mit ähnlichen Systemen angestellt hat. Es wird davon im vierten Abschnitt die Rede seyn.

In einer Reise des Hrn. Cachin in England, wovon die Handschrift bei der Ecole des Ponts et Chaussées niedergelegt ist, befindet sich die Zeichnung eines vertikalen Kranichs, der aus vier schwachen Stükken Holz zusammengesetzt ist, daß sie die vier Kanten eines in der Mitte vertikal ausgebauchten vierseitigen festen Körpers bilden. Diese Stücke werden je zwei und zwei durch kleine um- und aufgelegte horizontale Bänder in dieser Lage erhalten.

Eine andere für die Ausübung wichtige Beobachtung, ist die Anwendung zweier Stücke von schwacher Abvierung (équarrissage), welche durch ihre Entfernung in Hinsicht des Widerstandes mit einem weit dickern Stücke von gleichem Werthe sind, wenn man gut geschmiedetes Eisen hat. Diese Beobachtung ist auf runde und vierkantige Röhren anwendbar, womit wir uns jetzt beschäftigen werden.

Ueber das Gesetz XVII.

Es sind zwar weder runde noch vierkantige Röhren untersucht worden; aber nach der Übereinstimmung

der Theorie mit der Erfahrung für das System von zwei durch Andreaskreuze verbundenen Stücken, ist es außer Zweifel, daß Röhren, zwischen deren Theilen die Verbindung ohne irgend eine Zusammenfügung statt hat, die Theorie nicht vollständig rechtfertigen werden.

Man zieht aus diesem Gesetze die Folgerung, daß wenn der Widerstand eines massiven Cylinders durch 1 ausgedrückt wird, der Widerstand einer hohlen Röhre von gleichem Querschnitt $= 1 + \frac{2d^2}{D^2 - d^2}$ seyn werde, wo D und d die äußern und innern Durchmesser dieser Röhre vorstellen. Nimmt man an, daß der innere Durchmesser einer Röhre 20 mal ihrer Dicke gleich sey, so wird ihr Widerstand $9\frac{1}{2}$ mal stärker seyn als der eines massiven Cylinders von gleicher Länge und Schwere.

Die Kraft cylindrischer, in ihrer Mitte ausgehöhlter fester Körper ist schon vor längerer Zeit in Betracht gezogen worden. Hr. Gauthey hatte im Jahre 1805 die Anwendung der Röhren von Gußeisen zur Zusammensetzung der Bögen eines Brückengewölbes vorgeschlagen.

Ueber das XVIIIte und die folgenden Gesetze.

Die Versuche, welche diese Gesetze bestätigen, wurden in der Absicht unternommen, um deren Resultate auf den Widerstand eines Brückenbogens von Stabeisen, über die Dordogne bei Cubzac anzuwenden. Jeder Bogen hatte 32 Meter Sehne, 3,50 Meter Biegung, und war sowohl an den äußern als innern Seiten aus zwei Reihen auf die Kante gestellter Eisenstücke von 0,12 Meter Breite und 0,04 Meter Dicke (1 Me-

ter von Axe zu Axe aus einander stehend) zusammengesetzt. Diese Stücke waren durch Andreaskreuze mit einander verbunden. Von einem Bogen zum andern waren auf 0,80 Meter zu 0,80 Meter Distanz Verbindungs- und Zusammenhaltungsstücke dergestalt angebracht, daß die Bogen nur bloß in vertikaler Richtung eine Bewegung annehmen konnten, und daß jeder Theil eines Bogens sich unter dem Drucke, den er erleiden sollte, in seiner Dicke nicht biegen konnte. Dieser Druck wurde durch Rechnung für einen Bogen = 30000 Kilogrammen gefunden. Wir haben aus dem am Ende der dritten Reihe befindlichen Versuche gesehen, daß ein Gewölbschluß oder Widerlager (Voussoir), aus zwei Theilen von zwei auf einander folgenden Bögen bestehend, mehr als 100000 Kilogr. trug, und noch mehr hätte tragen können *). Da der ganze Bogen also wie ein einziges System betrachtet werden kann, welches durchaus auf die Art resistirt, wie der Bogen bei den Versuchen 82 bis 85, so wird dessen Widerstand durchaus derselbe seyn (Gesetz XVI), als der eines vollen Brückenbogens (archivolte) von gleicher Dicke und 0,96 Meter Höhe. Das Gewicht, wodurch dieser Brückenbogen sich gänzlich biegen kann, ist (Gesetz XXI.) 5 Million Kilogrammen. Das größte Gewicht, welches ein Bogen zu tragen hat, dürfte nicht über 6000 Ki-

---

*) Die Stücke dieses Probe-Gewölbschlusses (voussoir) waren bloß 0,03 Met. dick, während man die in dem Entwurfe der Brücke von Cubzac 0,04 Met. stark gemacht hatte.

logrammen betragen, indem man annimmt, daß er $\frac{1}{4}$ der totalen Belastung trüge (2 beladene Frachtwagen wägen ungefähr 24000 Kilogrammen). Unter diesem Gewicht von 6000 Kilogr., im Viertel, von einem Ende an gerechnet, angebracht, wird das Sinken des belasteten Punkts ungefähr 0,01 Meter betragen (Gesetz XXI.); aber die Verbindung des Brückenbogens (archivolte) mit dem obern Theile der Brücke wird dieses Sinken fast gänzlich verhindern.

Ueber das XXIIste und die folgenden Gesetze.

Diese sind bei eisernen Achsen in Maschinen anwendbar, wenn die Kraft und der Widerstand in zwei verschiedenen Ebenen wirken, welche mit beiden Enden der Achse perpendiculär sind, und diese Achse zu drehen streben. Das Gesetz XXV. zeigt noch den Vortheil der Anwendung der Röhren statt der massiven Cylinder, in solchen Fällen, wo diese Achsen einer beträchtlichen Drehkraft zu widerstehen hätten.

Tabellen über die Kraft der geschmiedeten Eisenstangen, nach ihren Dimensionen und der Art der Belastung.

Erste Tabelle.

Stangen, die perpendiculär und parallel mit ihrer Länge belastet sind.

Die zweite Columne zeigt die der Formel des Gesetzes II. correspondirenden Zahlen; die dritte die des Gesetzes III.; die vierte die, welche aus diesen zwei

vereinigten Gesetzen resultiren, und die fünfte die des Gesetzes XI.

L bezeichnet die Länge eines Stücks zwischen den Stützen, welche es tragen, oder die ganze Länge, wenn es am Ende gedrückt ist; l ist die Breite und e die Dicke. Man wird sich erinnern, daß wir, wenn das Stück horizontal auf zwei Stützen ruhet, Dicke (épaisseur) die Dimension in vertikaler Richtung nennen; ist aber das Stück am Ende gedrückt, so wird unter Dicke immer die kleinere Dimension dieses Stücks verstanden.

1. Stangen mit rectangulärem Querschnitt.

Verhältniß der Länge der Stange zu deren Dicke.	Stangen auf zwei Stützen ruhend und in der Mitte belastet.			Stangen parallel auf ihrer Länge belastet.
	Biegung unter 10 Kilogrammen.	Größte Biegung, die man 1 Stange geben könnte, (so daß die Elasticität derselben noch nicht gestört werde.)	Das größte Gewicht, womit man eine Stange in der Mitte belasten könnte, (so daß die Elasticität derselben noch nicht gestört werde.)	Gewicht, welches eine Stange zum Biegen bringt.
	Millimeter	Millimeter	Kilogrammen	Kilogrammen
300	$\frac{3375}{1}$	0,015. L	0,0133. le	0,18. le
280	$\frac{2744}{1}$	0,014. L	0,0143. le	0,21. le
260	$\frac{2197}{1}$	0,013. L	0,0154. le	0,24. le
240	$\frac{1728}{1}$	0,012. L	0,0167. le	0,29. le
220	$\frac{1331}{1}$	0,011. L	0,0182. le	0,34. le

	Millimeter	Millimeter	Kilogrammen	Kilogrammen
200	$\frac{1000}{1}$	0,010. L	0,0200. le	0,41. le
190	$\frac{857,4}{1}$	0,0095. L	0,0211. le	0,46. le
180	$\frac{729,0}{1}$	0,009. L	0,0222. le	0,51. le
170	$\frac{614,3}{1}$	0,0085. L	0,0235. le	0,57. le
160	$\frac{512,0}{1}$	0,008. L	0,0250. le	0,64. le
150	$\frac{421,8}{1}$	0,0075. L	0,0267. le	0,73. le
140	$\frac{343,0}{1}$	0,007. L	0,0286. le	0,84. le
130	$\frac{274,6}{1}$	0,0065. L	0,0308. le	0,97. le
120	$\frac{216,0}{1}$	0,006. L	0,0333. le	1,14. le
110	$\frac{166,4}{1}$	0,0055. L	0,0364. le	1,36. le

	Millimeter	Millimeter	Kilogrammen	Kilogrammen
100	$\frac{125,0}{1}$	0,005. L	0,0400. le	1,64. le
95	$\frac{107,17}{1}$	0,00475. L	0,0421. le	1,82. le
90	$\frac{91,12}{1}$	0,0045. L	0,0444. le	2,03. le
85	$\frac{76,77}{1}$	0,00425. L	0,0471. le	2,28. le
80	$\frac{64,00}{1}$	0,004. L	0,0500. le	2,57. le
75	$\frac{52,73}{1}$	0,00375. L	0,0533. le	2,92. le
70	$\frac{42,88}{1}$	0,0035. L	0,0571. le	3,36. le
65	$\frac{34,33}{1}$	0,00325. L	0,0615. le	3,89. le
60	$\frac{27,00}{1}$	0,003. L	0,0667. le	4,57. le
57	$\frac{23,15}{1}$	0,00285. L	0,0702. le	5,06. le

	Millimeter	Millimeter	Kilogrammen	Kilogrammen
54	$\frac{19,68}{1}$	0,0027. L	0,0741. le	5,64. le
51	$\frac{16,58}{1}$	0,00255. L	0,0784. le	6,32. le
48	$\frac{13,82}{1}$	0,0024. L	0,0833. le	7,14. le
45	$\frac{11,39}{1}$	0,00225. L	0,0889. le	8,12. le
42	$\frac{9,94}{1}$	0,0021. L	0,0952. le	9,33. le
39	$\frac{7,41}{1}$	0,00195. L	0,1026. le	10,82. le
36	$\frac{5,83}{1}$	0,0018. L	0,1111. le	12,69. le
33	$\frac{4\ 49}{1}$	0,00165. L	0,1212. le	15,11. le
30	$\frac{3,38}{1}$	0,0015. L	0,1333. le	18,28. le
28	$\frac{2,74}{1}$	0,0014. L	0,1429. le	20,98. le

	Millimeter	Millimeter	Kilogrammen	Kilogrammen
26	$\frac{2,20}{1}$	0,0013. L	0,1538. le	24,33. le
24	$\frac{1,73}{1}$	0,0012. L	0,1667. le	28,56. le
22	$\frac{1,33}{1}$	0,0011. L	0,1818. le	33,99. le
20	$\frac{1,00}{1}$	0,0010. L	0,2000. le	41,12. le

2. Runde Stangen.

Diese Tabelle kann auch für Rundeisen dienen, wenn man den Durchmesser d statt der Breite l und der Dicke e setzt, indem die zweite Columne mit 1,6977 und die vierte und fünfte mit 0,5889 multiplicirt wird, die dritte Columne bleibt unverändert.

Zweite Tabelle.

Runde und vierkantige Stangen, auf welche eine Kraft einwirkt, die sie zu drehen strebt.

Diese Stangen sind zu 10 Meter Länge angenommen. Das Gewicht, welches dieselben drehend zu machen strebt, beträgt 10 Kilogrammen, und wirkt in der auf das äußere Ende des Stücks perpendiculären Ebene, in einer Entfernung von 0,10 Meter vom Mittelpunkte.

Die zweite und dritte Columne sind nach den Formeln der Gesetze XXII und XXIV berechnet worden.

Durchmesser oder Seite.	Drehungswinkel am äußern Ende		Durchmesser oder Seite	Drehungswinkel am äußern Ende	
	Rundeisen	Vierk. Eisen		Rundeisen	Vierk. Eisen
Millimeter	Sechzigth. Grd.	Sechzigth. Gr.	Millimeter	Sechzigth. Gr.	Sechzigth. Gr.
20	5,52	3,91	32	0,84	0,60
21	4,54	3,21	34	0,66	0,47
22	3,77	2,67	36	0,53	0,37
23	3,15	2,23	38	0,42	0,30
24	2,66	1,88	40	0,35	0,24
25	2,26	1,60	42	0,28	0,20
26	1,93	1,37	44	0,24	0,17
27	1,66	1,18	46	0,20	0,14
28	1,44	1,02	48	0,17	0,12
29	1,25	0,88	50	0,14	0,10
30	1,09	0,77			

Vierter Abschnitt.

Zusamenstellung der von verschiedenen Schriftstellern über die Kraft des geschmiedeten Eisens angestellten Versuche.

Als ich mich im Jahre 1813 mit der Redaction dieser Abhandlung beschäftigte, waren mir nur sehr wenige Versuche in dieser Hinsicht bekannt. Fast alle bis dahin gemachten Versuche hatten bloß die Bestimmung der Kraft des nach der Länge gezogenen Stabeisens zum Zweck. Indeß sind seit jener Zeit mehrere Versuche bekannt geworden, welche ich, in so weit sie zu meiner Kenntniß gekommen sind, kurz zusammen stellen will.

1. Eisen, nach der Richtung seiner Länge gezogen.

Zahl der Versuche	Namen der Verfasser	Eisensorten	Seite oder Durchmesser des Eisens	Mittleres Gewicht, getragen aufs Ortsmillimeter	Bemerkungen
			Millimeter.	Kilogramm.	
	Vierkantiges Eisen.				
22	Musschenbroek	Aus Spanien, Schweden und England	2,62	52,3	
8	Poleni		3,73	44,5	S. Gauthey, T. II.
1	G. Rennie	England	6,35	39,2	Annal. de Phys et de Chim. sept. 1818.
1	Derselbe	Schweden	6,35	50,6	
5	Perronet		6,77	50,7	
9	Texier de Norbeck		2,26 bis 9	56,3	
2	Perronet		9,02	37,5	
4	Derselbe		12,97	35,9	Bibl. britann. février 1807.
	Banks		25,4	52,1	

	Vierkantiges Eisen.		Millimeter.	Kilogramm.	
6	Th. Telfort =	England und Schweden =	19,05 bis 27,51	40,4	Essai sur la force des bois, par P. Barlow. Londres 1818.
5	S. Brown = =	Schweden und Wales = = =	28,57 bis 33,32	33,7	
	Mittel aus den vorhergehenden Resultaten			44,8	S. die weiter unten folgende Note.

	Rundes Eisen.		Millimeter.	Kilogramm.	
21	Th. Telfort =	England = = = =	1,21 bis 2,54	44,4	Essai etc. par Barlow.
1	angestellt zu Bakewell	daher = = = = =	0,98	80,8	Bulletin de la Soc. d'Encourag. 1818.

	Rundes Eisen.		Millimeter.	Kilogramm.	
2	Buffon = = =	Frankreich = = =	2,26	59,5	
11	Perronet = =	daher = = = =	7,62 bis 10,15	43,4	Gauthey, T. II.
1	Sickingen = =	Schweden = = =	31,75	45,8	Bulletin de la Soc. d'Encourag. 1816.
3	Th. Telfort =	England = = = =	34,92 bis 50,80	42,6	Essai etc. par Barlow.
3	S. Brown = =	England und Rußland = =	31,04 bis 50,30	37,1	S. unten stehende Note.
	Das Mittel aus allen vorhergehenden Resultaten			45,7	

Anmerk. Barlow bemerkt bei den Versuchen der HH. Telfort und Brown, daß in dem Apparate des erstern, die Kraft sowohl den Widerstand des Eisens, als auch die Reibung der Maschine zu überwinden hatte, während daß bei dem Brown'schen Apparate die Reibung der Maschine sich mit der zum Gleichgewicht des Widerstandes des Eisens angewandten Kraft vereinigte.

Bei den folgenden Versuchen der HH. Soufflot und Rondelet, welche in dem vierten Bande von des letztern Art de bâtir beschrieben sind, ist besonders auf das Gewebe (die Textur) der angewandten Eisenarten Rücksicht genommen worden:

Zahl der Versuche	Breite des Eisens	Dicke des Eisens	Zum Zerbrechen nöthiges Gewicht, für den Qdratmillimeter	Textur des Eisens auf dem Bruche
	Millimeter	Millimeter	Kilogramm.	
3	9	9	18,1	grobkörnig.
3	9	9	24	von mittlerm Korn.
3	9	9	35,3	feinkörnig.
mehrere	9	9	35,3	zur Hälfte sehnig, zur Hälfte grobkörnig.
3	9	9	43,5	zur Hälfte sehnig, zur Hälfte mittelkörnig.
3	9	9	62,4	dasselbe Eisen, besser geschmiedet, durchaus sehnig.
2	13	6,7	32	etwa zur Hälfte sehnig.
3	13	5,6 und 6,7	39,9	$\frac{2}{3}$ sehnig, $\frac{1}{3}$ körnig.
3	6	4,5 und 5,1	58,8	ganz sehnig.
1	13,5	6,7	83,9	desgleichen.
1	Durchmessr.	6,7	92,3	desgleichen.

Hr. Rondelet, welcher diese Versuche beschreibt, fügt nach seinen eigenen Bemerkungen hinzu, daß die Gewalt des Hammers, um die Theile des Eisens einander näher zu bringen, und es sehnig zu machen, *bei* den groben Eisensorten nicht mehr als 1 Millimeter, und bei den feinern nicht über 4 Millimeter eindringe.

Bei mehrern der vorhin angeführten Versuche haben die Verfasser die Verlängerung des Eisens vor seinem Zerbrechen notirt. Diese Verlängerung hängt, wie zu erachten ist, von der Qualität des Eisens ab, und variirt von $\frac{1}{24}$ bis zu $\frac{1}{6}$ der ursprünglichen Länge. Man muß übrigens diese Verlängerung nicht mit derjenigen verwechseln, von welcher wir in der zweiten Anmerkung geredet haben, und welche wenig beträchtlich ist, um die Elasticität zu unterbrechen.

2. Eisen, perpendiculär auf dessen Länge belastet.

Seit der Redaction dieser Abhandlung, im Jahre 1813, kenne ich zwei Versuche des Hrn. Aubry, Generalinspectors der Brücken und Chausseen. Hr. Navier hat von diesen und von 9 andern durch ihn selbst angestellten, in dem zweiten Theile der Oeuvres de M. Gauthey Nachricht gegeben. Die Länge der Stücke variirt von 1 Meter bis zu 2 Meter 85 Centimetern, und die Dicke derselben von 15 bis zu 6,5 Millimetern. Ich habe nach den in dieser Abhandlung aufgestellten Formeln die Biegungen berechnet, welche diese Stücke unter einem bestimmten Gewichte annehmen müssen. Das

Verhältniß der gegebenen Biegung durch Rechnung und der durch den Versuch, variirt zwischen 0,66 und 1,57, und man muß bemerken, daß der erste dieser Werthe dem Stücke entspricht, dessen Dicke (0,015 Meter) in Beziehung auf die Länge (1,00 Meter) am größten ist, und daß der zweite demjenigen Stücke entspricht, dessen Dicke (0,0065 Meter) in Hinsicht der Länge (2,85 Meter) kleiner ist.

Ich will zwei Ursachen der Unrichtigkeit, welche mir bei meinen Versuchen aufgestoßen sind, und die hier ebenfalls statt gefunden haben könnten, anzeigen.

Wenn ein Stück im Verhältniß seiner Dicke kurz ist, so verändert eine kleine Einbiegung die Elasticität des Eisens. Um indeß diese Biegung zu messen, so muß solche merkbar seyn; man läuft dann sonst Gefahr, die Elasticität zu verändern, d. h. eine stärkere Krümmung hervorzubringen, als wenn die Schnellkraft der Fibern ihre Straffheit beibehält. Man kann sich davon überzeugen, wenn man die Belastung wegnimmt; das Stück nimmt seine anfängliche Form nicht mehr an. Noch gewisser ist man hiervon, wenn man die Biegungen unter den drei kleinen Gewichten sorgfältig mit denen durch beträchtlichere Gewichte erzeugten vergleicht.

Was lange und dünne Stücke betrifft, so verweisen wir auf die dergleichen Stücke betreffende Bemerkung in dem Entwurfe, welcher den Versuchen der ersten Reihe vorgesetzt ist.

Hr. Rondelet redet im 4ten Theile seines Traité de l'art de bâtir, von Versuchen, welche er mit 8 Stäben von geschmiedetem Eisen angestellt hat, deren Länge

zwischen 2,69 Meter und 4,99 Meter, und deren Dicke zwischen 0,0158 Meter und 0,0451 Meter variirte. Dieser Verfasser hat die Biegungen, welche diese Stücke annahmen, gemessen, und zwar: 1) in der Mitte aufgehängt, und durch die Wirkung ihres eigenen Gewichts; 2) an beiden Enden aufgehängt, und durch den Effekt ihres Gewichts allein, oder durch in der Mitte der Stücke hinzugefügte neue Belastungen. Die Resultate dieser Versuche stimmen auf eine genügende Weise mit denen überein, welche nach den Formeln dieser Abhandlung berechnet worden sind.

3. Eisen, parallel auf dessen Länge belastet.

Hr. Navier führt im zweiten Theile der Oeuvres de M. Gauthey 16 Versuche an, welche von ihm selbst und von Hrn. Bruyère in der Ecole des Ponts et Chaussées angestellt worden sind. Aber die untersuchten Stücke hatten nur eine Länge von 0,244 bis 0,433 Meter für eine mittlere Dicke von 0,012 Meter. Wahrscheinlich war das Verhältniß zwischen der Länge und der Dicke dieser Stücke zu schwach, als daß sie wie lange und dünne, und folglich sehr biegsame, Stücke hätten resistiren können. Hr. Navier bemerkt übrigens selbst, daß die zur Hervorbringung des Drucks angewandte Maschine mehrere Ursachen zur Unrichtigkeit herbeigeführt haben müsse.

Hr. Rondelet führt in der Folge der oben angezogenen Versuche zwei an, die er mit Stangen von 0,65 und 0,325 Meter Länge, und 0,0271 und 0,0135 Meter ins Gevierte, angestellt hat. Die Gewichte, wel-

che diese am Ende gedrückten Stangen zum Biegen brachten, sind $\frac{8}{100}$ schwächer, als die, welche man durch die Formeln dieser Abhandlung erhalten würde. Herr Rondelet redet noch von andern Versuchen, die er über denselben Gegenstand gemacht habe, er beschreibt sie aber nicht. Er fügt nachher eine Tabelle über den Widerstand der Stücke von verschiedenen Dimensionen bei; indeß würde diese Tabelle, ob sie gleich für den besondern Fall der beiden Rondelet'schen Versuche genau ist, die Resultate der Versuche, die den Gegenstand dieser Abhandlung ausmachen, nicht geben.

Derselbe Verfasser fährt fort, daß ein Stück Eisen sich eher biegt, als wieder zurückgeht (refouler), sobald seine Höhe das Dreifache seiner Dicke übersteigt.

Er erwähnt 7 Versuche über den Druck, welcher fähig ist, Würfel von geschmiedetem Eisen, oder Cylinder von gleicher Höhe und Durchmesser zum Zurückgehen (refouler) zu bringen. Die Höhe der untersuchten Würfel oder Cylinder variirte zwischen 0,0135 und 0,0271 Meter. Das fähige Gewicht zum Zurückgehen (refouler) derselben, fand man 49 Kilogrammen, 83 Decagrammen für das Quadratmillimeter; dieses Gewicht ist das mittlere Resultat; der Versuch, welcher sich am weitesten davon entfernt, gab nur $\frac{3}{100}$ Differenz. Es ist merkwürdig, daß dieses Gewicht wenig von demjenigen differirt, welches den Bruch des Eisens zuwege bringt, wenn es nach der Länge gezogen wird.

In der Bibliothèque universelle, Mars 1816, findet sich ein Versuch von Hrn. Pictet, über die Verkürzung des Eisens durch den Druck. Um die un-

tersuchte Stange um $\frac{1}{10000}$ ihrer ursprünglichen Länge zu verkürzen, waren auf das Quadratmillimeter 1,3 Kilogr. erforderlich.

4. Systeme von Stücken Eisen, welche so verbunden sind, daß sie unter sich einen Zwischenraum lassen.

Hr. Rondelet handelt noch von Versuchen mit Systemen, welche aus einem Bogen bestand, der an beiden Enden mit einer geraden Stange verbunden ist, fast so wie die Fig. 27., Tab. III. vorstellt. Die einzige Differenz war, daß die Extremitäten des Bogens und der geraden Stange sich auf einer gewissen Länge berührten, und mittelst eines Bandes (bride) verbunden und zusammengeschlossen waren.

Es würde zu weitläuftig, hier alle die Versuche aus einander zu setzen, welche sich in Rondelet's Werke finden. Sie stimmen sämmtlich darin überein, die Kraft dieser Systeme darzuthun. Wir wollen bloß eine Beobachtung anführen, weil sie fast unter gleichen Umständen gemacht ist, wie die Versuche 82 und 83 der vierten Reihe in dieser Abhandlung.

Breite des Bogens	0,0631	Meter.
Dicke	0,0158	"
Länge der Sehne des Bogens .	3,90	"
Entfernung zwischen dem Bogen und der Stange, welche die Sehne bildet, in gerader Linie gehalten .	0,1692	"

Unter 189,44 Kilogr. bog sich der Bogen in der Mitte, so daß er die Sehne berührte.

Nach dem Gesetz XIX des dritten Abschnitts dieser Schrift, ist das zum Biegen dieses Bogens fähige Gewicht, wenn die Extremitäten völlig frei waren, 171 Kilogrammen.

Dieses Gewicht ist kleiner als das nach dem Versuche; indeß muß man bedenken, daß in der angestellten Probe die äußersten Enden des Bogens mit denen der Sehne verbunden waren; als man nun den Bogen belastete, so theilte sich die Bewegung seiner Extremitäten denen der Sehne mit, deren Mitte also zum Zurückgehen angetrieben wurde. Diese Anordnung mußte den Widerstand des dem Versuche unterworfenen Bogens vermehren.

5. Eisenstangen, welche einer drehenden Kraft unterworfen werden.

Wir haben die Drehung (torsion) des Eisens, als ziemlich unbedeutend, zur Störung der Elasticität betrachtet.

Der Calcul und die Erfahrung haben uns gelehrt, daß für runde, und wahrscheinlich auch für vierkantige Stangen, der Widerstand durch Drehung der vierten Potenz des Durchmessers oder der Seite des Querschnitts proportional ist.

Man kann indeß die Gewichte und die Drehung der Eisenarten bis zum Zerbrechen vermehren. Weil dieses Zerbrechen statt hat, wenn die äußere Oberfläche eine Drehung erlitten hat, welche einerlei ist, der Durchmesser der Stange mag seyn wie er will, so folgt hieraus und aus dem, was im ersten Abschnitte gesagt ist,

daß der Widerstand zum Zerbrechen durch Drehung, für runde Stangen, der dritten Potenz des Durchmessers proportional ist.

Hr. George Rennie (Annales de Physique et de Chimie, Tom. IX. Sept. 1818.) hat verschiedene Metalle, und unter andern geschmiedetes Eisen durch Drehung zu zerbrechen versucht.

Zwei vierkantige Eisenstäbe, von 0,0063 Meter Seite, die eine aus England, die andere aus Schweden, erforderten zum Zerbrechen, erstere ein Gewicht von 5,10 Kilogr. und die zweite 4,31 Kilogr.

In den beiden vorhergehenden Versuchen war die die Drehung hervorbringende Kraft unmittelbar an dem äußern festen Ende der Stangen angebracht. In andern vergleichenden Versuchen derselben Art mit Gußeisen, ließ Hr. Rennie die Kraft der Drehung in verschiedener Entfernung wirken (das Maximum war 0,25 Meter). Die Differenz, welche sich zwischen den Resultaten zeigte, kann sowohl von den verschiedenen Qualitäten des Gußeisens, als von der Entfernung zwischen den Anwendungspunkten der Kraft und des Widerstandes herrühren.

Bei den Versuchen mit Gußeisen hat man Stangen von 0,0063 und 0,0127 Meter Seite gebraucht; das zum Zerbrechen der zweiten Stangen angewandte Gewicht war 8 mal größer, als das zu den erstern, in so fern die durch die Differenz der Güte des Eisens hervorgebrachte Veränderlichkeit der Resultate die Beobachtung derselben zuließ.

Anmerkungen.

Erste Anmerkung.

Über die Versuche 2 und (3).

Um den Widerstand des triangulären Prisma's zu berechnen, haben wir angenommen, daß die Linie des Durchgangs der Spannung bis zur Zusammendrückung in einem Querschnitt des Prisma, gerade, und so gelegt ist, daß das Integral $\int y^3 dx$ für die Axe von x, oberhalb und unterhalb genommen, denselben Werth hat. Die Lage dieser geraden Linie ist durch eine Gleichung vom vierten Grade gegeben, und ihre Länge ist 1,282, wenn die Seite des Dreiecks = 2 ist.

Es ist also das berechnete Resultat 7,39 und das des Versuchs 7,6.

Wir haben versucht, den Widerstand zu berechnen, indem wir annahmen, daß die Linie des Durchgangs der Spannung die gebrochene Linie ist, welche alle in dem, einen Querschnitt des Prisma bildenden Dreieck vertikal gezogene gerade Linien in zwei gleiche Theile theilt.

Der berechnete Widerstand des Stücks ist also größer als der, welchen die Beobachtung giebt, und zwar in dem Verhältniß von 4 zu 3.

Zweite Anmerkung.

Über den Grad der Ausdehnung oder der Zusammendrückung, wodurch die Eisenfibern ihre Elasticität verlieren.

Wenn eine rectanguläre Stange auf zwei Stützen gelegt, und in der Mitte belastet ist, so sind es die Fi-

dern der Oberfläche, welche sich am meisten ausdehnen oder zusammen ziehen.

Es sey e die Dicke des Stücks, und r der Halbmesser der Krümmung der in einem gewissen Punkt unveränderlichen Längenfiber, so wird $\frac{e}{2r}$ die Ausdehnung oder die Zusammenziehung der Fibern an der Oberfläche, in einem in diesem Punkte gemachten Querschnitte ausdrücken.

Das Maximum dieser Ausdehnung oder Zusammenziehung ist in der Mitte des Stücks, wo man hat (Abschn. I. §. I. art. 2. 3.).

$$\frac{A}{r} = CL;$$

C ist die Hälfte des in der Mitte des Stücks angebrachten Gewichts, dessen halbe Länge = L.

Auch hat man $f = \frac{CL^3}{3A}$ für den Werth der Biegung dieses Stücks.

Schafft man aus beiden Gleichungen A weg, so erhält man für den Halbmesser der Krümmung im Scheitel durch eine Function der Biegung ausgedrückt,

$$r = \frac{L^2}{3f}.$$

Diesen Werth in $\frac{e}{2r}$ gesetzt, so hat man für den Ausdruck der größten Ausdehnung oder Zusammenziehung der Fibern eines gekrümmten Stücks

$$\frac{e}{2r} = \frac{3ef}{2L^2}.$$

Hier folgt dieser Werth für einige Versuche der ersten Reihe.

Nummer der Versuche	Halbe Länge der Stücke	Dicke	Biegung. Maximum.	Gewicht. Maximum.	Werth der größten Ausdehnung oder Zusammz.
Stücke, deren Elasticität durch das Maximum des Gewichts verändert war.					
15	1 Meter	0,012 Met.	0,054 Met.	45 Kilogrm.	0,000972
17	1	0,0115	0,0525	25	0,000906
36	1 50	0,020	0,033	50	0,000441
49	1,46	0,031	0,021	70	0,000458
Stücke, welche ihre Elasticität durch den Effekt der Belastung nicht verloren hatten.					
21	1	0 040	0,01503	90	0,000902
22	1,50	0,014	0,072	50	0,000672
29	1,50	0,025	0,070	50	0,001167
38	1,50	0,060	0,015	200	0,000600
42	1,50	0,245	0,042	70	0,000686
46	2,50	0,030	0,038	80	0,000274
48	2,50	0,108	0,008	200	0,000207
73	2	0,060	0,032		0,000720
80	2,90	0,174	0,011		0,000341

Man sieht, daß die Stücke unter Nro. 36 und 49 ihre Elasticität bei einer Verlängerung der Fibern von ungefähr 0,00045 ihrer anfänglichen Länge verloren haben, während diese Verlängerung bei den Stücken Nro. 21 und 29, deren Elasticität noch nicht gestört war, 0,0009 bis 0,00012 betrug.

Begreiflich muß die größte Verlängerung, deren das Eisen fähig ist, ohne daß es aufhört elastisch zu seyn, nach der Qualität desselben veränderlich seyn.

Gesetzt, das Eisen ist im Begriffe, seine Elasticität zu verlieren, wenn seine Fibern um 0,0003 ihrer anfänglichen Länge verlängert sind. Nennt man diesen Werth h, und setzt ihn statt $\frac{e}{2r}$ in der Gleichung $\frac{e}{2r} = \frac{3ef}{2L^2}$, so wird

$$f = \frac{2hL^2}{3e} = \frac{0{,}0002 \,.\, L^2}{e}.$$

Dieses ist der Werth der größten Biegung, welche ein Stück von der Länge 2L und der Dicke e annehmen könnte, ohne daß dessen Elasticität gestört würde.

Wenn man diesen Werth von f in der Gleichung $f = 0{,}0000125 \,.\, 2\,C \,.\, (2L)^3$ (3ter Abschnitt) setzt, so ist

$$2\,C = 20000\ h\ \frac{le^2}{3L} = \frac{2le^2}{L}.$$

Dieses ist (in Kilogrammen ausgedrückt) der Werth des größten Gewichts, womit ein Gewicht von der Länge 2L, der Breite l und der Dicke e (in Millimetern ausgedrückt) belastet werden könnte, ohne seine Elasticität zu verlieren.

Dritte Anmerkung.

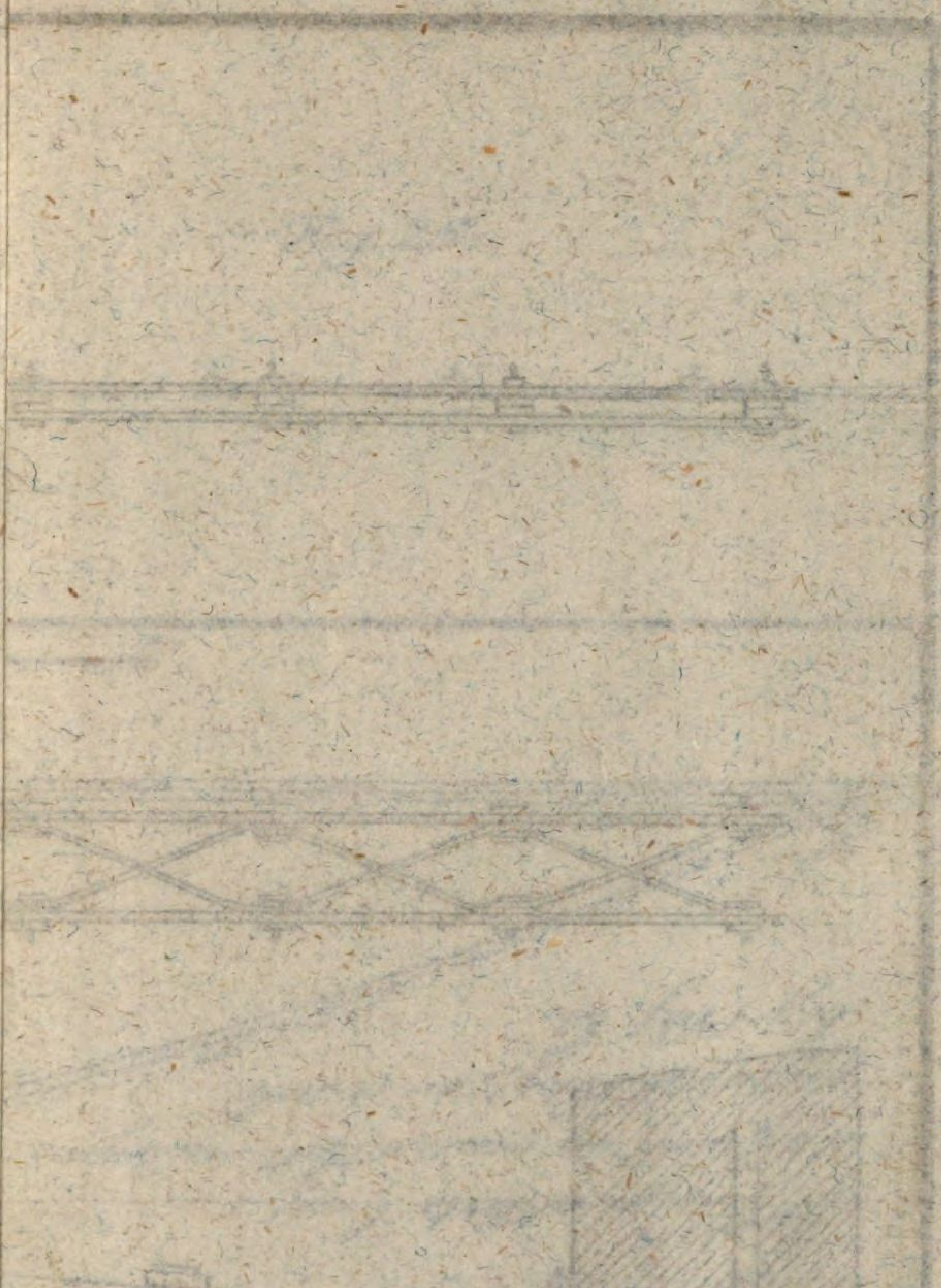
Über die am Ende gedrückten Stücke.

Folgende Tabelle zeigt die Vergleichung der durch den Calcul angezeigten Gewichte mit denen der Versuche, durch welche die am Ende gedrückten Stücke zum Biegen gebracht werden können.

Bayerische Staatsbibliothek München

Nummer der Versuche.	Verhältniß der Länge u. Dicke der Stücke	Verhältniß d. Resultate der Versuche u. d. des Calculs	Nummer der Versuche	Verhältniß der Länge u. Dicke der Stücke	Verhältniß d. Resultate der Versuche u. d. des Calculs
(28)	200	1,19	(35)	100	1,24
(9)	182	1,16	(50) und (52)	94	1,15
(12)	179	1,29	(13)	89	1,20
(18)	174	1,04	(20)	87	0,90
(16)	167	1,25	(18)	92	1,11
(32)	153	1,45	(3)	97	1,03
(37)	150	1,37	Versuche des Hrn. Rondelet.	24	0,93
(25)	133	1,24		24	0,92
(43)	122	1,26			

Mittlerer Werth des Verhältnisses der Resultate der Versuche mit denen des Calculs = = = = = = = = = = = = = = = = = 1,16



Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Duleau, Alphonse Jean Claude

Theoretisch-praktische Versuche über den Widerstand oder die Haltbarkeit des geschmiedeten Eisens mit Anwendung der Resultate dieser Versuche in der Baukunst

Quedlinburg [u.a.] 1825

BHS III 17 a
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708265-1